⌖ CHƯƠNG I

NHỮNG KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Lý thuyết mạch là một trong những môn học cơ sở của chuyên ngành Điện tử-Viễn thông-Tự động hóa.

Không giống như **Lý thuyết trường** - là môn học nghiên cứu các phần tử mạch điện như tụ điện, cuộn dây. . . để giải thích sự vận chuyển bên trong của chúng - **Lý thuyết mạch** chỉ quan tâm đến hiệu quả khi các phần tử này nối lại với nhau để tạo thành mạch điện (hệ thống).

Chương này nhắc lại một số khái niệm cơ bản của môn học.

1.1 DẠNG SÓNG CỦA TÍN HIỆU

Tín hiệu là sự biến đổi của một hay nhiều thông số của một quá trình vật lý nào đó theo qui luật của tin tức.

Trong phạm vi hẹp của mạch điện, tín hiệu là hiệu thế hoặc dòng điện. Tín hiệu có thể có trị không đổi, ví dụ hiệu thế của một pin, accu; có thể có trị số thay đổi theo thời gian, ví dụ dòng điện đặc trưng cho âm thanh, hình ảnh. . . .

Tín hiệu cho vào một mạch được gọi là **tín hiệu vào** hay **kích thích** và tín hiệu nhận được ở ngã ra của mạch là **tín hiệu ra** hay **đáp ứng**.

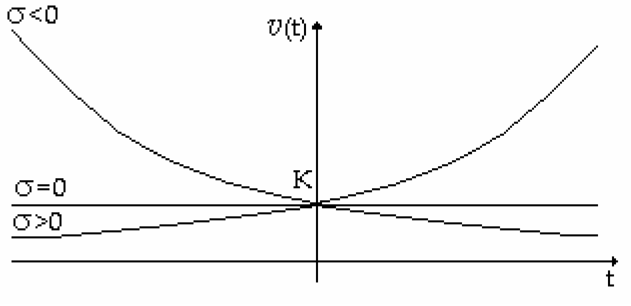
Người ta dùng các hàm theo thời gian để mô tả tín hiệu và đường biểu diễn của chúng trên hệ trục biên độ - thời gian được gọi là dạng sóng.

Dưới đây là một số hàm và dạng sóng của một số tín hiệu phổ biến.

1.1.1 Hàm mũ (Exponential function)

$v(t) = Ke^{\sigma t}$ K , σ là các hằng số thực.

(H 1.1) là dạng sóng của hàm mũ với các trị σ khác nhau



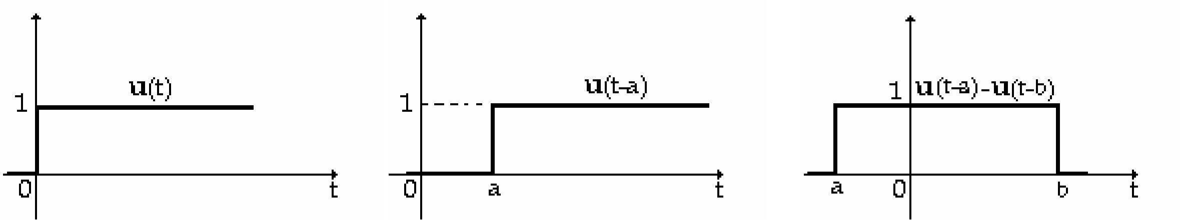
(H 1.1)

1.1.2 Hàm nấc đơn vị (Unit Step function)

$$u(t - a) = \begin{cases} 1\,, & t \geq a \\ 0\,, & t < a \end{cases}$$

Đây là tín hiệu có giá trị thay đổi đột ngột từ 0 lên 1 ở thời điểm t = a.

(H 1.2) là một số trường hợp khác nhau của hàm nấc đơn vị



(a) (b) (c)

(H 1.2)

Hàm nấc u(t-a) nhân với hệ số K cho Ku(t-a), có giá tri bằng K khi t ≥ a.

1.1.3 Hàm dốc (Ramp function)

Cho tín hiệu nấc đơn vị qua mạch tích phân ta được ở ngã ra tín hiệu dốc đơn vị.

$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} u(x)dx$$

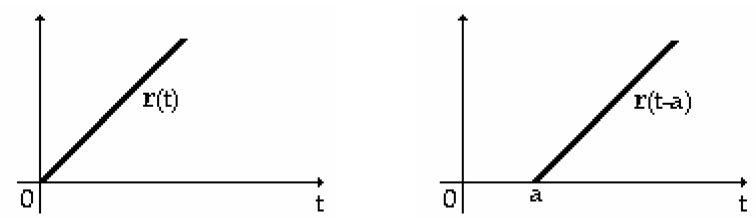
Nếu ta xét tại thời điểm t=0 và mạch không tích trữ năng lượng trước đó thì:

$$r(t) = \int_{0}^{t} u(x)dx + u(0) \quad \text{với} \quad u(0) = \int_{-\infty}^{0} u(x)dx = 0$$

Dựa vào kết quả trên ta có định nghĩa của hàm dốc đơn vị như sau:

$$r(t - a) = \begin{cases} t\,, & t \geq a \\ 0\,, & t < a \end{cases}$$

(H 1.3) là dạng sóng của r(t) và r(t-a)



(a) (H 1.3) (b)

Hàm dốc r(t-a) nhân với hệ số K cho hàm Kr(t-a), dạng sóng là đường thẳng có độ dốc K và gặp trục t ở a.

1.1.4 Hàm xung lực (Impulse function)

Cho tín hiệu nấc đơn vị qua mạch vi phân ta được tín hiệu ra là một xung lực đơn vị

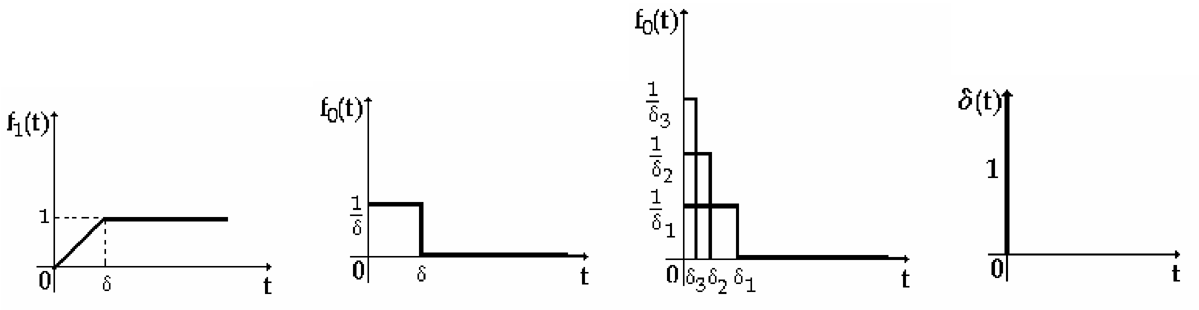
$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

(δ(t) còn được gọi là hàm Delta Dirac)

Ta thấy δ(t) không phải là một hàm số theo nghĩa chặt chẽ toán học vì đạo hàm của hàm nấc có trị = 0 ở $t \neq 0$ và không xác định ở t = 0. Nhưng đây là một hàm quan trọng trong lý thuyết mạch và ta có thể hình dung một xung lực đơn vị hình thành như sau:

Xét hàm $f_1(t)$ có dạng như (H 1.4a):

$$f_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{\delta} r(t), & t \in \{0, \delta\} \\ 1 \quad, & t > \delta \end{cases}$$



(a) (b) (c) (d)

(H 1.4)

Hàm $f_0(t)$ xác định bởi:

$$f_0(t) = \frac{df_1(t)}{dt}$$

$f_0(t)$ chính là độ dốc của $f_1(t)$ và $= \frac{1}{\delta}$ khi ($0 \leq t \leq \delta$) và = 0 khi $t > \delta$ (H 1.4b).

Với các trị khác nhau của δ ta có các trị khác nhau của $f_0(t)$ nhưng phần diện tích giới hạn giữa $f_0(t)$ và trục hoành luôn luôn =1 (H 1.4c).

Khi $\delta \to 0$, $f_1(t) \to u(t)$ và $f_0(t) \to \delta(t)$.

Vậy xung lực đơn vị được xem như tín hiệu có bề cao cực lớn và bề rộng cực nhỏ và diện tích bằng đơn vị (H 1.4d).

Tổng quát, xung lực đơn vị tại t=a, δ(t-a) xác định bởi:

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(t)dt = \begin{cases} 1, & t \geq a \\ 0, & t < a \end{cases}$$

Các hàm nấc, dốc, xung lực được gọi chung là **hàm bất thường**.

1.1.5 Hàm sin

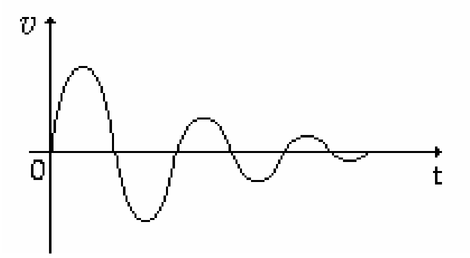
Hàm sin là hàm khá quen thuộc nên ở đây chỉ giới thiệu vài hàm có quan hệ với hàm sin.

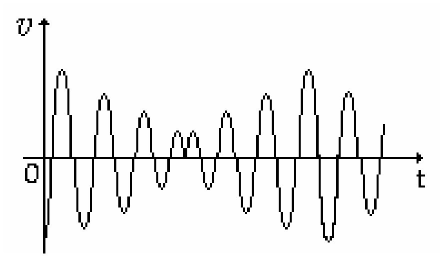
⌖ Hàm sin tắt dần:

$v(t)=Ae^{-\sigma t}\sin\omega t$, t>0 và A là số thực dương (H 1.5a)

⌖ Tích hai hàm sin có tần số khác nhau

$v(t)=A\sin\omega_1 t.\sin\omega_2 t$ (H 1.5b)



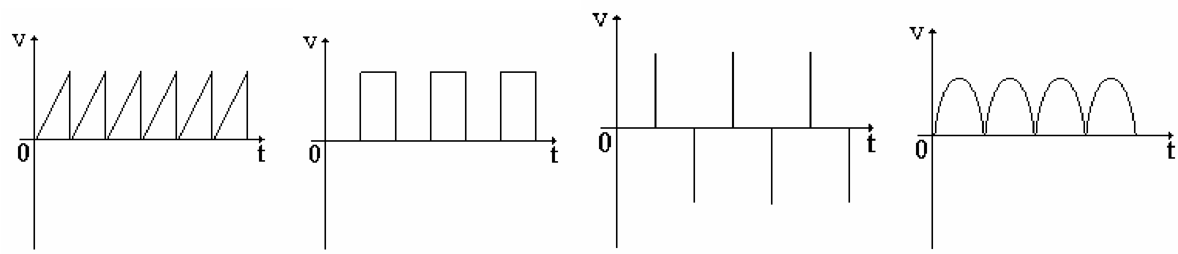


(a) (H 1.5) (b)

1.1.6 Hàm tuần hoàn không sin

Ngoài các tín hiệu kể trên, chúng ta cũng thường gặp một số tín hiệu như: răng cưa, hình vuông, chuỗi xung. . . . được gọi là tín hiệu không sin, có thể là tuần hoàn hay không. Các tín hiệu này có thể được diễn tả bởi một tổ hợp tuyến tính của các hàm sin, hàm mũ và các hàm bất thường.

(H 1.6) mô tả một số hàm tuần hoàn quen thuộc



(H 1.6)

1.2 PHẦN TỬ MẠCH ĐIỆN

Sự liên hệ giữa tín hiệu ra và tín hiệu vào của một mạch điện tùy thuộc vào bản chất và độ lớn của các phần tử cấu thành mạch điện và cách nối với nhau của chúng.

Người ta phân các phần tử ra làm hai loại:

⌖ **Phần tử thụ động**: là phần tử nhận năng lượng của mạch. Nó có thể tiêu tán năng lượng (dưới dạng nhiệt) hay tích trữ năng lượng (dưới dạng điện hoặc từ trường).

Gọi $v(t)$ là hiệu thế hai đầu phần tử và $i(t)$ là dòng điện chạy qua phần tử. Năng lượng của đoạn mạch chứa phần tử xác định bởi:

$$W(t) = \int_{-\infty}^{t} v(t).i(t)dt$$

- Phần tử là thụ động khi $W(t) \geq 0$, nghĩa là dòng điện đi vào phần tử theo chiều giảm của điện thế.

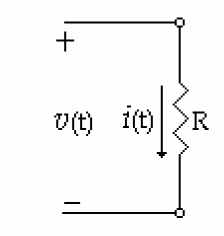
Điện trở, cuộn dây và tụ điện là các phần tử thụ động.

⌖ **Phần tử tác động**: là phần tử cấp năng lượng cho mạch ngoài. Năng lượng của đoạn mạch chứa phần tử W(t)<0 và dòng điện qua phần tử theo chiều tăng của điện thế.

Các nguồn cấp điện như pin , accu và các linh kiện bán dẫn như transistor, OPAMP là các thí dụ của phần tử tác động.

1.2.1 Phần tử thụ động

1.2.1.1 Điện trở



(H 1.7)

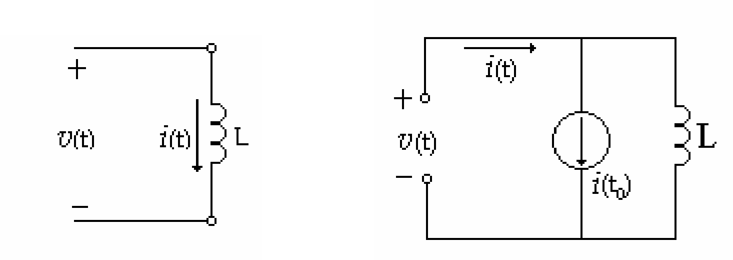
- Ký hiệu (H 1.7)
- Hệ thức: $v(t) = R.\,i(t)$
- Hay $i(t) = G.v(t)$
- Với G=1/R (gọi là điện dẫn)

Đơn vị của điện trở là Ω (Ohm)

Và của điện dẫn là Ω^{-1} (đọc là Mho)

- Năng lượng: $W(t) = \int_{-\infty}^{t} v(t).i(t)dt = \int_{-\infty}^{t} Ri(t)^2 dt \geq 0$

1.2.1.2 Cuộn dây



(a) (b)

(H 1.8)

- Ký hiệu (H 1.8a)
- Hệ thức: $v(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$
- Hay $i(t) = \dfrac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(t)dt$

Đơn vị của cuộn dây là H (Henry)

Do cuộn dây là phần tử tích trữ năng lượng nên ở thời điểm t_0 nào đó có thể cuộn dây đã trữ một năng lượng từ trường ứng với dòng điện $i(t_0)$

Biểu thức viết lại:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(t)dt + i(t_0)$$

Và mạch tương đương của cuộn dây được vẽ lại ở (H 1.8b)

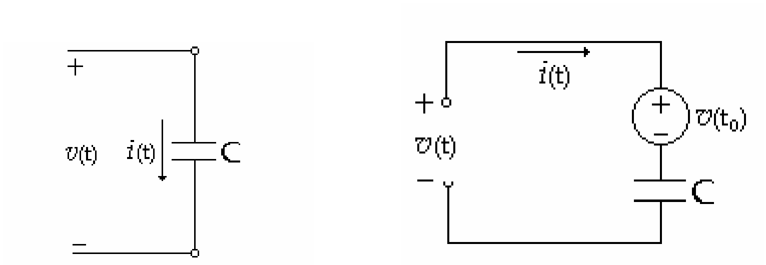
⌖ Năng lượng tích trữ trong cuộn dây:

$$W(t) = \int_{-\infty}^{t} v(t).i(t)dt$$

Thay $v(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$

$$W(t) = \int_{-\infty}^{t} Li(t)di = \frac{1}{2}Li(t)^2\Big]_{-\infty}^{t} = \frac{1}{2}Li(t)^2 \geq 0$$ (vì $i(-\infty)=0$)

1.2.1.3 Tụ điện



(a) (H 1.9) (b)

- Ký hiệu (H 1.9a)
- Hệ thức: $i(\mathrm{t}) = \mathrm{C}\dfrac{\mathrm{d}v(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}}$
- Hay $v(\mathrm{t}) = \dfrac{1}{\mathrm{C}}\int_{-\infty}^{\mathrm{t}} i(\mathrm{t})\mathrm{dt}$

Đơn vị của tụ điện là F (Farad)

Do tụ điện là phần tử tích trữ năng lượng nên ở thời điểm t_0 nào đó có thể nó đã trữ một năng lượng điện trường ứng với hiệu thế $v(t_0)$

Biểu thức viết lại:

$$v(\mathrm{t}) = \frac{1}{\mathrm{C}}\int_{\mathrm{t}_0}^{\mathrm{t}} i(\mathrm{t})\mathrm{dt} + v(\mathrm{t}_0)$$

Và mạch tương đương của tụ điện được vẽ như (H 1.9b)

⌖ Năng lượng tích trữ trong tụ điện

$$\mathrm{W(t)} = \int_{-\infty}^{\mathrm{t}} v(\mathrm{t}).i(\mathrm{t})\mathrm{dt}$$

Thay $i(\mathrm{t}) = \mathrm{C}\dfrac{\mathrm{d}v(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}}$

$$\mathrm{W(t)} = \int_{-\infty}^{\mathrm{t}} \mathrm{C}v(\mathrm{t})\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\mathrm{C}v(\mathrm{t})^2]_{-\infty}^{\mathrm{t}} = \frac{1}{2}\mathrm{C}v(\mathrm{t})^2 \geq 0$$ (vì $v(-\infty)=0$)

Chú ý: Trong các hệ thức *v-i* của các phần tử R, L, C nêu trên, nếu đổi chiều một trong hai lượng *v* hoặc *i* thì hệ thức đổi dấu (H 1.10): $v(t) = -R.i(t)$

(H 1.10)

1.2.2 Phần tử tác động

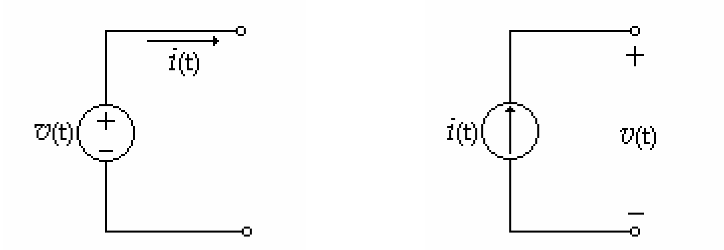
Ở đây chỉ đề cập đến một số phần tử tác động đơn giản, đó là các loại nguồn.

Nguồn là một phần tử lưỡng cực nhưng không có mối quan hệ trực tiếp giữa hiệu thế *v* ở hai đầu và dòng điện *i* đi qua nguồn mà sự liên hệ này hoàn toàn tùy thuộc vào mạch ngoài, do đó khi biết một trong hai biến số ta không thể xác định được biến số kia nếu không rõ mạch ngoài.

1.2.2.1 Nguồn độc lập

Là những phần tử mà giá trị của nó độc lập đối với mạch ngoài

- Nguồn hiệu thế độc lập: có giá trị *v* là hằng số hay *v*(t) thay đổi theo thời gian. Nguồn hiệu thế có giá trị bằng không tương đương **một mạch nối tắt**
- Nguồn dòng điện độc lập: có giá trị *i* là hằng số hay *i*(t) thay đổi theo thời gian. Nguồn dòng điện có giá trị bằng không tương **đương một mạch hở**



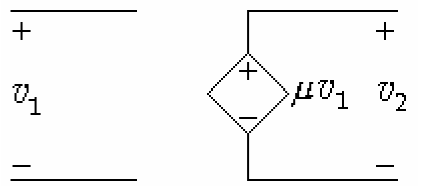
(H 1.11)

1.2.2.2 Nguồn phụ thuộc

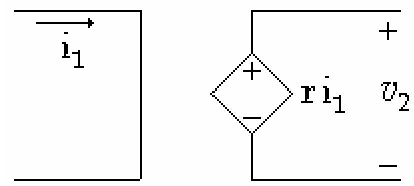
Nguồn phụ thuộc có giá trị phụ thuộc vào hiệu thế hay dòng điện ở một nhánh khác trong mạch. Những nguồn này đặc biệt quan trọng trong việc xây dựng mạch tương đương cho các linh kiện điện tử.

Có 4 loại nguồn phụ thuộc:

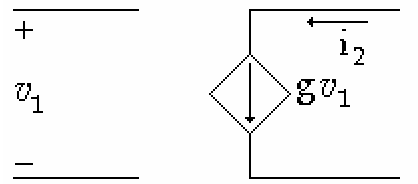
- Nguồn hiệu thế phụ thuộc hiệu thế (Voltage-Controlled Voltage Source, VCVS)
- Nguồn hiệu thế phụ thuộc dòng điện (Current-Controlled Voltage Source, CCVS)
- Nguồn dòng điện phụ thuộc hiệu thế(Voltage-Controlled Current Source, VCVS)
- Nguồn dòng điện phụ thuộc dòng điện (Current-Controlled Current Source, CCCS)



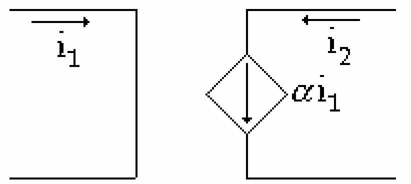
(a)VCVS



(b) CCVS



(c)VCCS



(d) CCCS

(H 1.12)

1.3 MẠCH ĐIỆN

Có hai bài toán về mạch điện:

- Phân giải mạch điện: cho mạch và tín hiệu vào, tìm tín hiệu ra.
- Tổng hợp mạch điện: Thiết kế mạch khi có tín hiệu vào và ra.

Giáo trình này chỉ quan tâm tới loại bài toán thứ nhất.

Quan hệ giữa tín hiệu vào x(t) và tín hiệu ra y(t) là mối quan hệ nhân quả nghĩa là tín hiệu ra ở hiện tại chỉ tùy thuộc tín hiệu vào ở quá khứ và hiện tại chứ không tùy thuộc tín hiệu vào ở tương lai, nói cách khác, y(t) ở thời điểm t_0 nào đó không bị ảnh hưởng của x(t) ở thời điểm $t>t_0$.

Tín hiệu vào thường là các hàm thực theo thời gian nên đáp ứng cũng là các hàm thực theo thời gian và tùy thuộc cả tín hiệu vào và đặc tính của mạch.

Dưới đây là một số tính chất của mạch dựa vào quan hệ của y(t) theo x(t).

1.3.1 Mạch tuyến tính

Một mạch gọi là tuyến tính khi tuân theo định luật:

Nếu $y_1(t)$ và $y_2(t)$ lần lượt là đáp ứng của hai nguồn kích thích độc lập với nhau $x_1(t)$ và $x_2(t)$, mạch là tuyến tính nếu và chỉ nếu đáp ứng đối với

$x(t)= k_1x_1(t) + k_2x_2(t)$

là $y(t)= k_1y_1(t) + k_2y_2(t)$ với mọi x(t) và mọi k_1 và k_2.

Trên thực tế, các mạch thường không hoàn toàn tuyến tính nhưng trong nhiều trường hợp sự bất tuyến tính không quan trọng và có thể bỏ qua. Thí dụ các mạch khuếch đại dùng transistor là các mạch tuyến tính đối với tín hiệu vào có biên độ nhỏ. Sự bất tuyến tính chỉ thể hiện ra khi tín hiệu vào lớn.

Mạch chỉ gồm các phần tử tuyến tính là mạch tuyến tính.

Thí dụ 1.1

Chứng minh rằng mạch vi phân, đặc trưng bởi quan hệ giữa tín hiệu vào và ra theo hệ thức:

$y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$ là mạch tuyến tính

Giải

Gọi $y_1(t)$ là đáp ứng đối với $x_1(t)$: $y_1(t)=\frac{dx_1(t)}{dt}$

Gọi $y_2(t)$ là đáp ứng đối với $x_2(t)$: $y_2(t)=\frac{dx_2(t)}{dt}$

Với $x(t)= k_1x_1(t) + k_2\, x_2(t)$ đáp ứng y(t) là:

$$y(t)=\frac{dx(t)}{dt}=k_1\frac{dx_1(t)}{dt}+k_2\frac{dx_2(t)}{dt}$$

$y(t)=k_1y_1(t)+k_2y_2(t)$

Vậy mạch vi phân là mạch tuyến tính

1.3.2 Mạch bất biến theo thời gian (time invariant)

Liên hệ giữa tín hiệu ra và tín hiệu vào không tùy thuộc thời gian. Nếu tín hiệu vào trễ t_0 giây thì tín hiệu ra cũng trễ t_0 giây nhưng độ lớn và dạng không đổi.

Một hàm theo t trễ t_0 giây tương ứng với đường biểu diễn tịnh tiến t_0 đơn vị theo chiều dương của trục t hay t được thay thế bởi $(t-t_0)$. Vậy, đối với mạch bất biến theo thời gian, đáp ứng đối với $x(t-t_0)$ là $y(t-t_0)$

Thí dụ 1.2

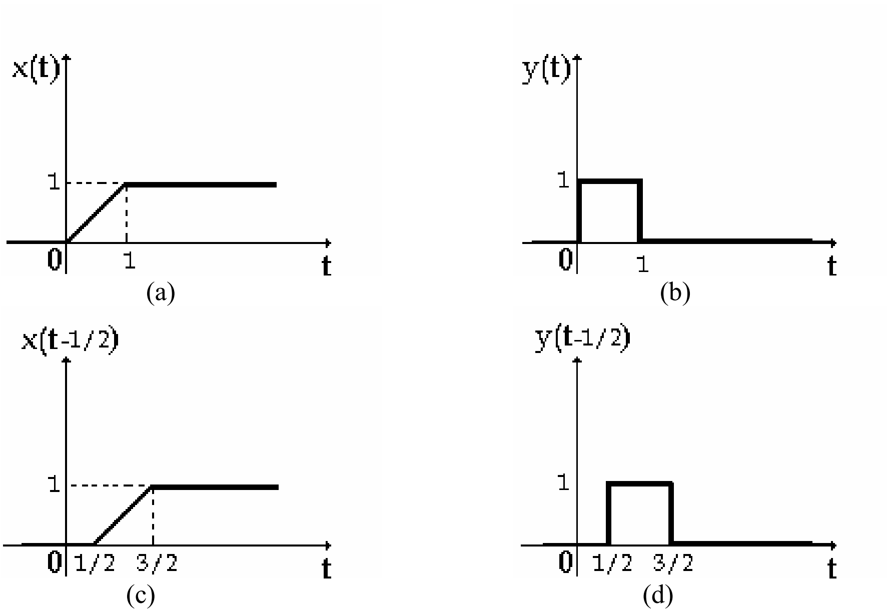
Mạch vi phân ở thí dụ 1.1 là mạch bất biến theo thời gian

Ta phải chứng minh đáp ứng đối với $x(t-t_0)$ là $y(t-t_0)$.

Thật vậy:

$$\frac{dx(t-t_0)}{dt}=\frac{dx(t-t_0)}{d(t-t_0)}x\frac{d(t-t_0)}{d(t)}=y(t-t_0)x1$$

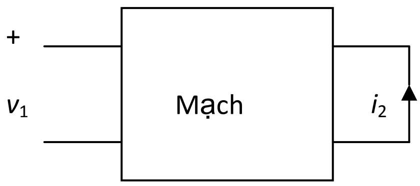
Để minh họa, cho x(t) có dạng như (H 1.13a) ta được y(t) ở (H 1.13b). Cho tín hiệu vào trễ (1/2)s, x(t-1/2) (H 1.13c), ta được tín hiệu ra cũng trễ (1/2)s, y(t-1/2) được vẽ ở (H 1.13d).

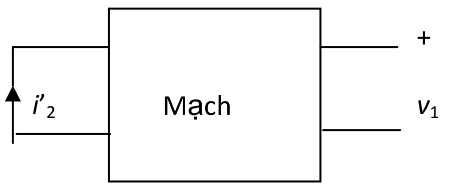


(H 1.13)

1.3.3 Mạch thuận nghịch

Xét mạch (H 1.14)



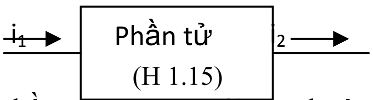


(H 1.14)

Nếu tín hiệu vào ở cặp cực 1 là v_1 cho đáp ứng ở cặp cực 2 là dòng điện nối tắt i_2 . Bây giờ, cho tín hiệu v_1 vào cặp cực 2 đáp ứng ở cặp cực 1 là i'_2. Mạch có tính thuận nghịch khi $i'_2=i_2$.

1.3.4 Mạch tập trung

Các phần tử có tính tập trung khi có thể coi tín hiệu truyền qua nó tức thời. Gọi i_1 là dòng điện vào phần tử và i_2 là dòng điện ra khỏi phần tử, khi $i_2= i_1$ với mọi t ta nói phần tử có tính tập trung.



(H 1.15)

Một mạch chỉ gồm các phần tử tập trung là mạch tập trung..

Với một mạch tập trung ta có một số điểm hữu hạn mà trên đó có thể đo những tín hiệu khác nhau.

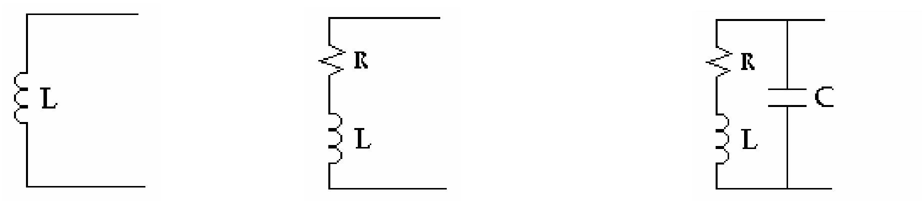
Mạch không tập trung là một **mạch phân tán**. Dây truyền sóng là một thí dụ của mạch phân tán, nó tương đương với các phần tử R, L và C phân bố đều trên dây. Dòng điện truyền trên dây truyền sóng phải trễ mất một thời gian để đến ngã ra.

1.4 MẠCH TƯƠNG ĐƯƠNG

Các phần tử khi cấu thành mạch điện phải được biểu diễn bởi các mạch tương đương. Trong mạch tương đương có thể chứa các thành phần khác nhau

Dưới đây là một số mạch tương đương trong thực tế của một số phần tử.

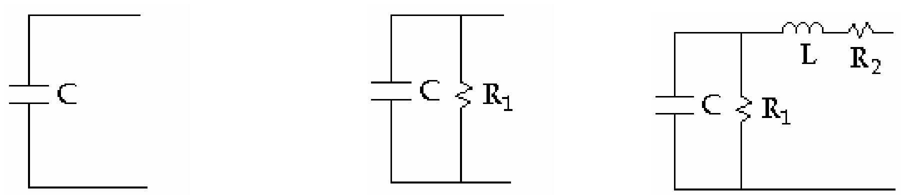
1.4.1 Cuộn dây



(H 1.16)

Cuộn dây lý tưởng được đặc trưng bởi giá trị điện cảm của nó. Trên thực tế, các vòng dây có điện trở nên mạch tương đương phải mắc nối tiếp thêm một điện trở R và chính xác nhất cần kể thêm điện dung của các vòng dây nằm song song với nhau

1.4.2 Tụ điện



(a) (b) (c)

(H 1.17)

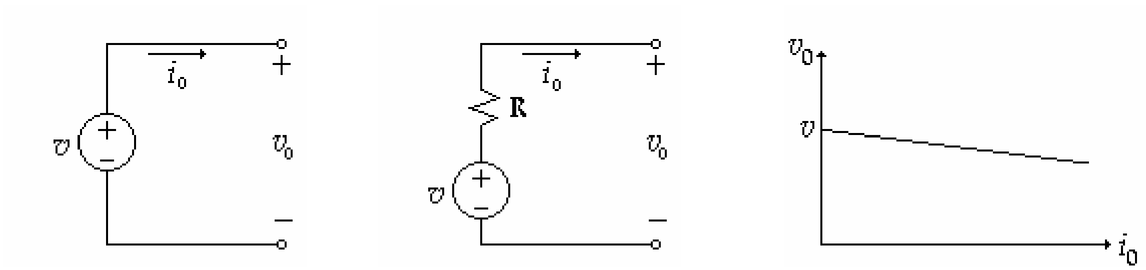
(H 1.17a) là một tụ điện lý tưởng, nếu kể điện trở R_1 của lớp điện môi, ta có mạch tương (H 1.17b) và nếu kể cả điện cảm tạo bởi các lớp dẫn điện (hai má của tụ điện) cuốn thành vòng và điện trở của dây nối ta có mạch tương ở (H 1.17c)

1.4.3 Nguồn độc lập có giá trị không đổi

1.4.3.1 Nguồn hiệu thế

Nguồn hiệu thế đề cập đến ở trên là nguồn lý tưởng.

Gọi v là hiệu thế của nguồn, v_0 là hiệu thế giữa 2 đầu của nguồn, nơi nối với mạch ngoài, dòng điện qua mạch là i_0 (H 1.18a). Nếu là nguồn lý tưởng ta luôn luôn có $v_0 = v$ không đổi. Trên thực tế, giá trị v_0 giảm khi i_0 tăng (H 1.18c); điều này có nghĩa là bên trong nguồn có một điện trở mà ta gọi là nội trở của nguồn, điện trở này đã tạo một sụt áp khi có dòng điện chạy qua và sụt áp càng lớn khi i_0 càng lớn. Vậy mạch tương đương của nguồn hiệu thế có dạng (H 1.18b)

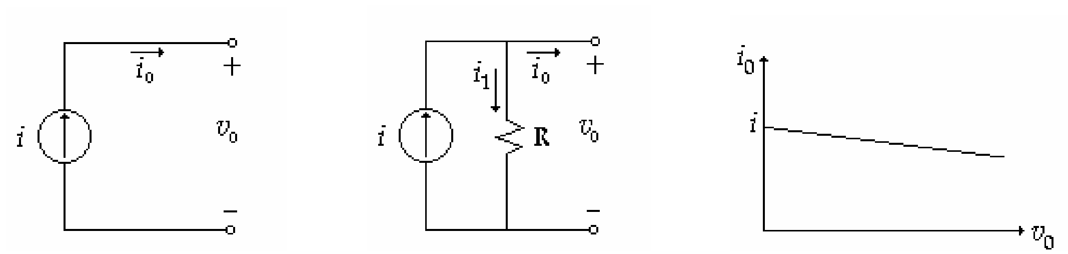


(a) (b) (c)

(H 1.18)

1.4.3.2 Nguồn dòng điện

Tương tự, nguồn dòng điện thực tế phải kể đến nội trở của nguồn, mắc song song với nguồn trong mạch tương đương và điện trở này chính là nguyên nhân làm giảm dòng điện mạch ngoài i_0 khi hiệu thế v_0 của mạch ngoài gia tăng.



(H 1.19)

BÀI TẬP

--⌖⌖⌖ --

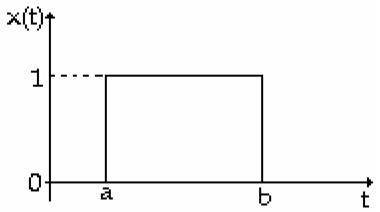
1. Vẽ dạng sóng của các tín hiệu mô tả bởi các phương trình sau đây:

a. $\sum_{n=1}^{10}\delta(t-nT)$ với T=1s

b. u(t)sin$\frac{2\pi t}{T}$ và u(t-T/2)sin$\frac{2\pi t}{T}$

c. r(t).u(t-1), r(t)-r(t-1)-u(t-1)

2. Cho tín hiệu có dạng (H P1.1).



Hãy diễn tả tín hiệu trên theo các hàm:

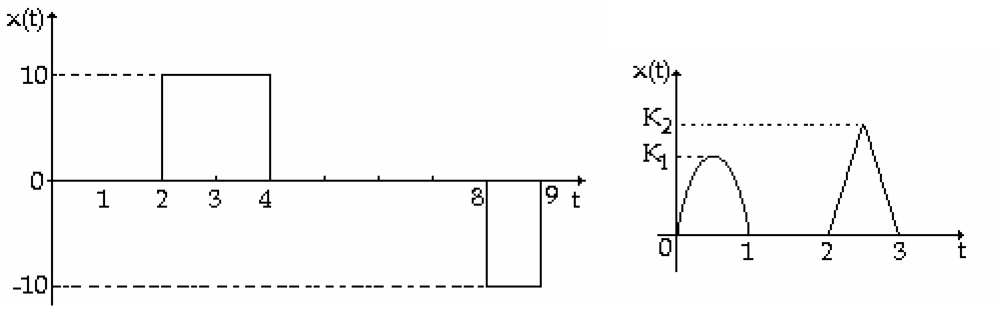
a. u(t-a) và u(t-b)

b. u(b-t) và u(a-t)

c. u(b-t) và u(t-a)

(H P1.1)

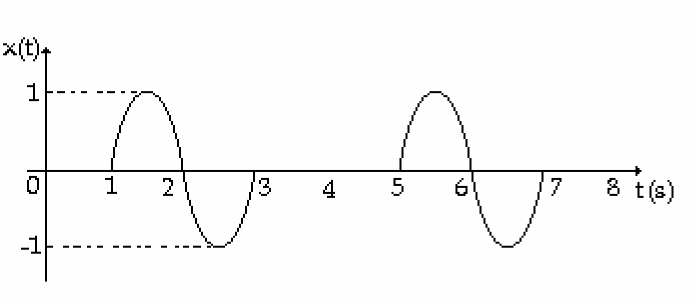
3.Viết phương trình dạng sóng của các tín hiệu không tuần hoàn ở (H P1.2) theo tập hợp tuyến tính của các hàm bất thường (nấc, dốc), sin và các hàm khác (nếu cần)

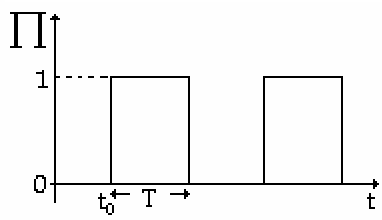


(a) (b)

(H P1.2)

4. Cho tín hiệu có dạng (H P1.3)





(H P1.3) (H P1.4)

a. Viết phương trình dạng sóng của các tín hiệu theo tập hợp tuyến tính của các hàm sin và các hàm nấc đơn vị.
b. Xem chuỗi xung có dạng (H P1.4)

Chuỗi xung này có dạng của các cổng, khi xung có giá trị 1 ta nói cổng mở và khi trị này =0 ta nói cổng đóng.

Ta có thể diễn tả một hàm cổng mở ở thời điểm t_0 và kéo dài một khoảng thời gian T bằng một hàm cổng có ký hiệu:

$$\prod_{t_0,T}(t) = u(t-t_0) - u(t-t_0-T)$$

Thử diễn tả tín hiệu (H P1.3) bằng tích của một hàm sin và các hàm cổng.

5. Cho ý kiến về tính tuyến tính và bất biến theo t của các tín hiệu sau:

a. $y = x^2$

b. $y = t\dfrac{dx}{dt}$

c. $y = x\dfrac{dx}{dt}$

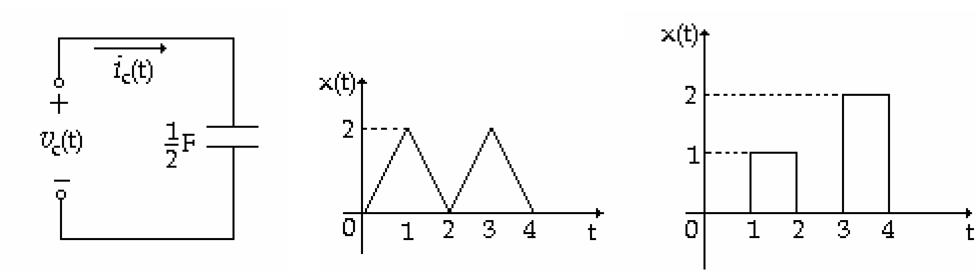
6. Cho mạch (H P1.6a) và tín hiệu vào (H P1.6b)

Tình đáp ứng và vẽ dạng sóng của đáp ứng trong 2 trường hợp sau (cho $v_C(0) = 0$):

a. Tín hiệu vào x(t) là nguồn hiệu thế v_C và đáp ứng là dòng điện i_C.

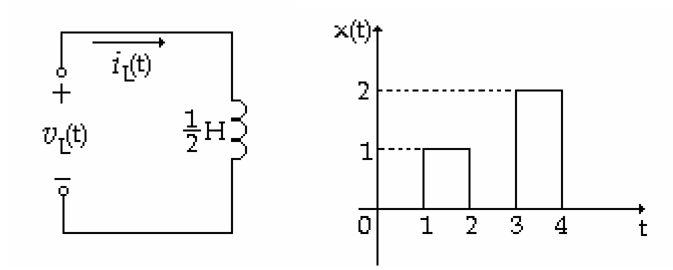
b. Tín hiệu vào x(t) là i_C nguồn hiệu thế và đáp ứng là dòng điện v_C.

Bảng dưới đây cho ta dữ kiện của bài toán ứng với các (H 5a, b, c...) kèm theo. Tính đáp ứng và vẽ dạng sóng của đáp ứng

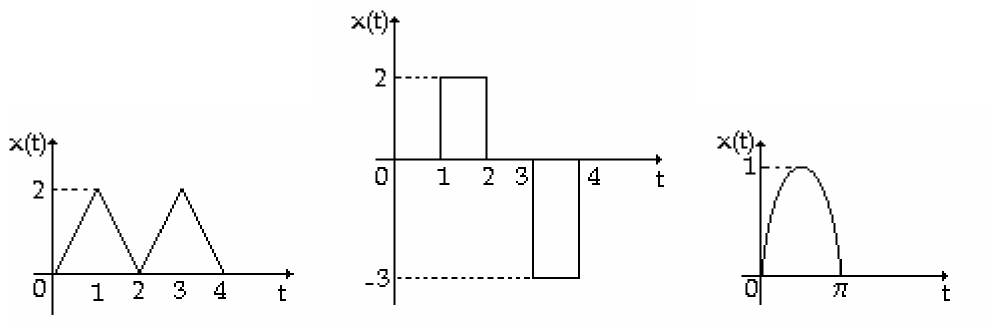


(a) (b) (c)

(H P1.6)



(a) (b) (c)



(d) (e) (f)

(H P1.5)

Câu	Mạch hình	Kích thích x(t)	Dạng sóng	Đáp ứng
a	a	v_c	d	i_c
b	a	v_c	f	i_c
c	a	i_c	c	v_c
d	a	i_c	d	v_c
e	b	v_L	c	i_L
f	b	v_L	d	i_L
g	b	i_L	e	v_L
h	b	i_L	f	v_L

✸ CHƯƠNG 2

ĐỊNH LUẬT VÀ ĐỊNH LÝ MẠCH ĐIỆN

❋ ĐỊNH LUẬT KIRCHHOF

❋ ĐIỆN TRỞ TƯƠNG ĐƯƠNG

❋ ĐỊNH LÝ MILLMAN

❋ ĐỊNH LÝ CHỒNG CHẤT

❋ ĐỊNH LÝ THEVENIN VÀ NORTON

❋ BIẾN ĐỔI Y ↔ Δ (ĐỤNH LÝ KENNELY)

Chương này đề cập đến hai định luật quan trọng làm cơ sở cho việc phân giải mạch, đó là các định luật Kirchhoff.

Chúng ta cũng bàn đến một số định lý về mạch điện. Việc áp dụng các định lý này giúp ta giải quyết nhanh một số bài toán đơn giản hoặc biến đổi một mạch điện phức tạp thành một mạch đơn giản hơn, tạo thuận lợi cho việc áp dụng các định luật Kirchhoff để giải mạch.

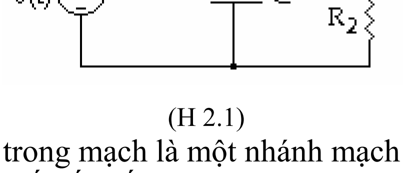
Trước hết, để đơn giản, chúng ta chỉ xét đến **mạch gồm toàn điện trở** và **các loại nguồn**, gọi chung là **mạch DC**. Các phương trình diễn tả cho loại mạch như vậy chỉ là các phương trình đại số (Đối với mạch có chứa L & C, ta cần đến các phương trình vi tích phân)

Tuy nhiên, khi khảo sát và ứng dụng các định lý, chúng ta chỉ chú ý đến cấu trúc của mạch mà không quan tâm đến bản chất của các thành phần, do đó các kết quả trong chương này cũng áp dụng được cho các trường hợp tổng quát hơn.

Trong các mạch DC, đáp ứng trong mạch luôn luôn có dạng giống như kích thích, nên để đơn giản, ta dùng kích thích là các nguồn độc lập có giá trị không đổi thay vì là các hàm theo thời gian.

2.1 định luật kirchhoff

Một mạch điện gồm hai hay nhiều phần tử nối với nhau, các phần tử trong mạch tạo thành những nhánh. Giao điểm của hai hay nhiều nhánh được gọi là nút. Thường người ta coi nút là giao điểm của 3 nhánh trở nên. Xem mạch (H 2.1).



(H 2.1)

- Nếu xem mỗi phần tử trong mạch là một nhánh mạch này gồm 5 nhánh và 4 nút.
- Nếu xem nguồn hiệu thế nối tiếp với R_1 là một nhánh và 2 phần tử L và R_2 là một nhánh (trên các phần tử này có cùng dòng điện chạy qua) thì mạch gồm 3 nhánh và 2 nút.

Cách sau thường được chọn vì giúp việc phân giải mạch đơn giản hơn.

Hai định luật cơ bản làm nền tảng cho việc phân giải mạch điện là:

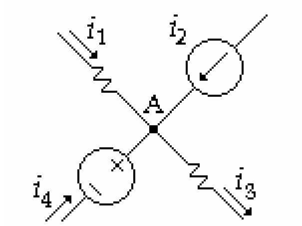
2.1.1. Định luật Kirchhoff về dòng điện : (Kirchhoff's Current Law, KCL)

Tổng đại số các dòng điện tại một nút bằng không .

$$\sum_{j} i_j = 0 \qquad (2.1)$$

i_j là dòng điện trên các nhánh gặp nút j.

Với qui ước: Dòng điện rời khỏi nút có giá trị âm và dòng điện hướng vào nút có giá trị dương (hay ngược lại).



(H 2.2)

Theo phát biểu trên, ta có phương trình ở nút A (H 2.2):

$$i_1 + i_2 - i_3 + i_4 = 0 \qquad (2.2)$$

Nếu ta qui ước dấu ngược lại ta cũng được cùng kết quả:

$$-i_1 - i_2 + i_3 - i_4 = 0 \qquad (2.3)$$

Hoặc ta có thể viết lại:

$$i_3 = i_1 + i_2 + i_4 \qquad (2.4)$$

Và từ phương trình (2.4) ta có phát biểu khác của định luật KCL:

Tổng các dòng điện chạy vào một nút bằng tổng các dòng điện chạy ra khỏi nút đó.

Định luật Kirchhoff về dòng điện là hệ quả của nguyên lý bảo toàn điện tích:

Tại một nút điện tích không được sinh ra cũng không bị mất đi.

Dòng điện qua một điểm trong mạch chính là lượng điện tích đi qua điểm đó trong một đơn vị thời gian và nguyên lý bảo toàn điện tích cho rằng lượng điện tích đi vào một nút luôn luôn bằng lượng điện tích đi ra khỏi nút đó.

2.1.2. Định luật Kirchhoff về điện thế: (Kirchhoff's Voltage Law, KVL).

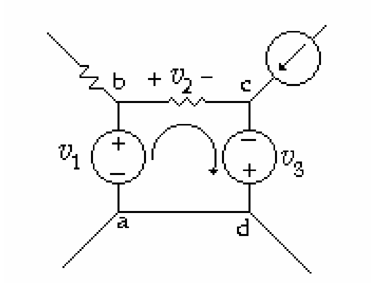
Tổng đại số hiệu thế của các nhánh theo một vòng kín bằng không

$$\sum_{K} v_K(t) = 0 \qquad (2.5)$$

Để áp dụng định luật Kirchhoff về hiệu thế, ta chọn một chiều cho vòng và dùng qui ước: Hiệu thế có dấu (+) khi đi theo vòng theo chiều giảm của điện thế (tức gặp cực dương trước) và ngược lại.

Định luật Kirchhoff về hiệu thế viết cho vòng abcd của (H 2.3).

$$- v_1 + v_2 - v_3 = 0$$



(H 2.3)

Ta cũng có thể viết KVL cho mạch trên bằng cách chọn hiệu thế giữa 2 điểm và xác định hiệu thế đó theo một đường khác của vòng:

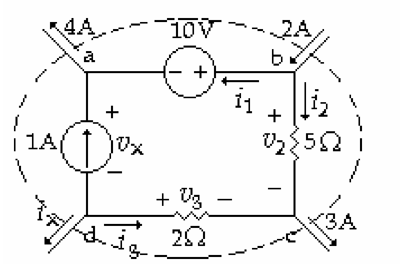
$$v_1 = v_{ba} = v_{bc} + v_{ca} = v_2 - v_3$$

Định luật Kirchhoff về hiệu thế là hệ quả của nguyên lý bảo toàn năng lượng: **Công trong một đường cong kín bằng không**.

Vế trái của hệ thức (2.5) chính là công trong dịch chuyển điện tích đơn vị (+1) dọc theo một mạch kín.

Thí dụ 2.1 .

Tìm i_x và v_x trong (H2.4)



(H 2.4)

Giải:

Áp dụng KCL lần lượt cho các cho nút a, b, c, d

$- i_1 - 1 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_1 = 3A$

$- 2A + i_1 + i_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_2 = -1A$

$- i_3 + 3A - i_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_3 = 4A$

$i_x + i_3 + 1A = 0 \quad \Rightarrow \quad i_x = - 5A$

Áp dụng định luật KVL cho vòng abcd:

$- v_x - 10 + v_2 - v_3 = 0$

Với $v_2 = 5\, i_2 = 5.(- 1) = - 5V$

$v_3 = 2\, i_3 = 2.(4) = 8V$

$\Rightarrow \quad v_x =- 10 - 5 - 8 = -23V$

✷Trong thí dụ trên , ta có thể tính dòng i_x từ các dòng điện ở bên ngoài vòng abcd đến các nút abcd.

Xem vòng abcd được bao bởi một mặt kín (vẽ nét gián đoạn).

Định luật Kirchhoff tổng quát về dòng điện có thể phát biểu cho mặt kín như sau: **Tổng đại số các dòng điện đến và rời khỏi mặt kín bằng không**.

Với qui ước dấu như định luật KCL cho một nút.

Như vậy phương trình để tính i_x là:

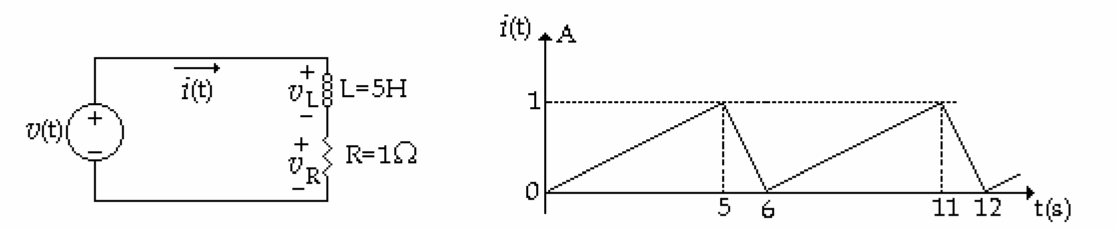
$$- i_x - 4 + 2 - 3 = 0$$

Hay $i_x = - 5$ A

Định luật có thể được chứng minh dễ dàng từ các phương trình viết cho các nút abcd chứa trong mặt kín có dòng điện từ các nhánh bên ngoài đến.

Thí dụ 2.2:

L và R trong mạch (H 2.5a) diễn tả cuộn lệch ngang trong TiVi nếu L = 5H, R = 1Ω và dòng điện có dạng sóng như (H 2.5b). Tìm dạng sóng của nguồn hiệu thế v(t).



(a) (b)

(H 2.5)

Giải:

Định luật KVL cho :

$- v(t) + v_R(t) + v_L(t) = 0$ (1)

hay $v(t) = v_R + v_L(t) = Ri(t) + L\dfrac{di(t)}{dt}$

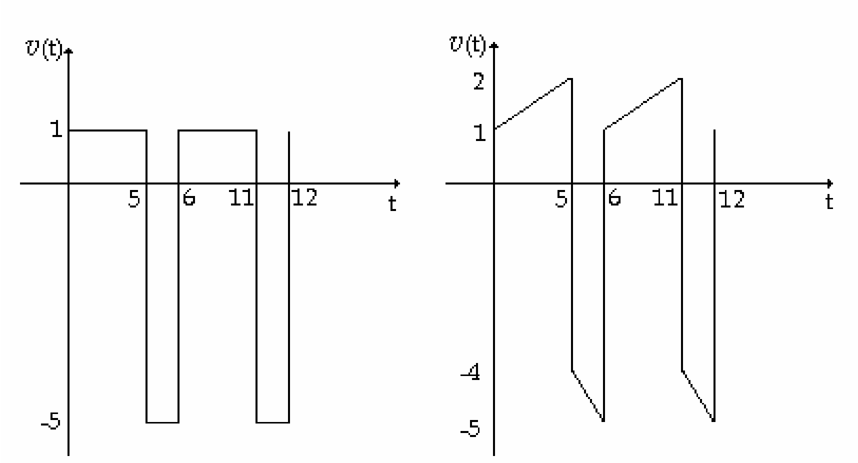
Thay trị số của R và L vào:

$v_L(t) = 5\dfrac{di(t)}{dt}$ (2)

$v_R(t) = 1.\ i(t)$ (3)

Và $v(t) = i(t) + 5\dfrac{di(t)}{dt}$ (4)

Dựa vào dạng sóng của dòng điện i(t), suy ra đạo hàm của i(t) và ta vẽ được dạng sóng của v_L(t) (H 2.6a) và v(t) (H 2.6b) từ các phương trình (2), (3) và (4).



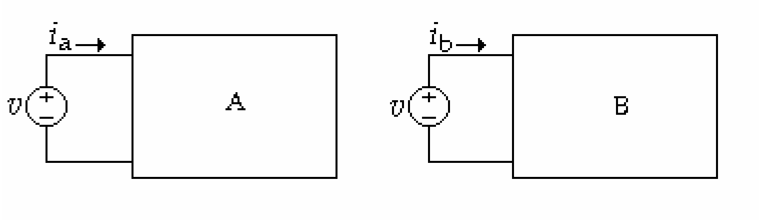
(a) (H 2.6) (b)

2.2 Điện trở tương đương

Hai mạch gọi là tương đương với nhau khi người ta không thể phân biệt hai mạch này bằng cách đo dòng điện và hiệu thế ở những đầu ra của chúng.

Hai mạch lưỡng cực A và B ở (H 2.7) tương đương nếu và chỉ nếu:

$i_a = i_b$ với mọi nguồn v



(H 2.7)

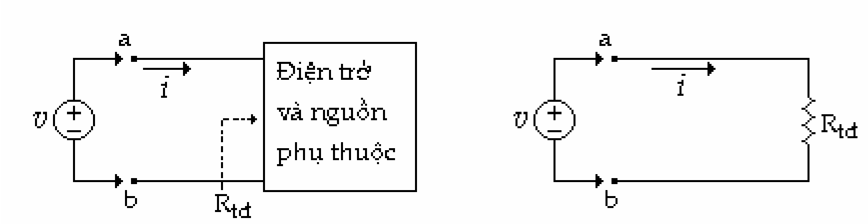
Dưới đây là phát biểu về khái niệm điện trở tương đương:

Bất cứ một lưỡng cực nào chỉ gồm điện trở và nguồn phụ thuộc đều tương đương với một điện trở.

Điện trở tương đương nhìn từ hai đầu a & b của một lưỡng cực được định nghĩa:

$$R_{tđ} = \frac{v}{i} \qquad (2.6)$$

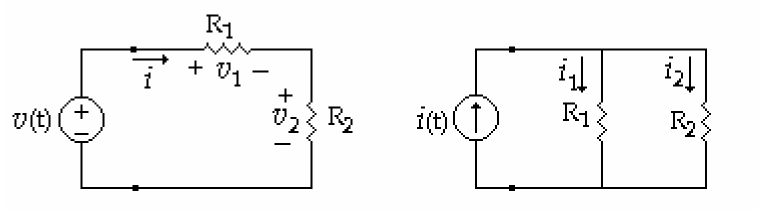
Trong đó v là nguồn bất kỳ nối vào hai đầu lưỡng cực.



(H 2.8)

Thí dụ 2.3:

Mạch (H 2.9a) và (H 2.9b) là cầu chia điện thế và cầu chia dòng điện. Xác định các điện thế và dòng điện trong mạch.



(a) (H 2.9) (b)

Giải:

a/ (H 2.9a) cho

$v = v_1 + v_2 = R_1 i + R_2 i = (R_1 + R_2) i$

$\Rightarrow \quad R_{tđ} = \frac{v}{i} = R_1 + R_2$

Từ các kết quả trên suy ra : $i = \frac{v}{R_1 + R_2}$

$\Rightarrow \quad v_1 = R_1\, i = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} v \qquad$ và $\qquad v_2 = R_2\, i = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} v$

b/ (H 2.9b) cho

$i = i_1 + i_2 \qquad$ hay $\qquad \dfrac{v}{R_{tđ}} = \dfrac{v}{R_1} + \dfrac{v}{R_2}$

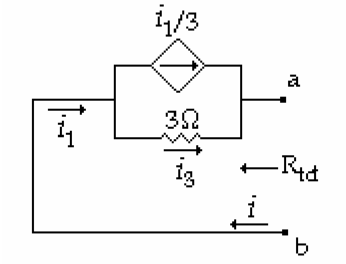
$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{R_{tđ}} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} \qquad$ hay $\qquad G_{tđ} = G_1 + G_2$

Từ các kết quả trên suy ra: $v = \dfrac{1}{G_1 + G_2} i$

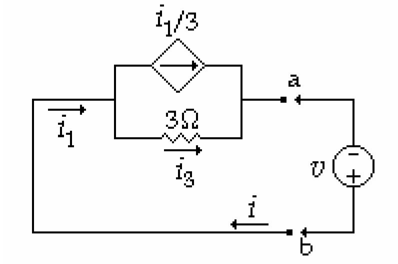
$\Rightarrow \quad i_1 = G_1 v = \dfrac{G_1}{G_1 + G_2} i = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} i \qquad$ và $\qquad i_2 = G_2 v = \dfrac{G_2}{G_1 + G_2} i = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} i$

Thí dụ 2.4:

Tính $R_{tđ}$ của phần mạch (H 2.10a)



(a)



(b)

(H 2.10)

Giải:

Mắc nguồn hiệu thế v vào hai đầu a và b như (H2.10b) và chú ý $i = i_1$.

Định luật KCL cho $\qquad i_1 = i_3 + \dfrac{1}{3} i_1 \Rightarrow i_3 = \dfrac{2}{3} i_1$

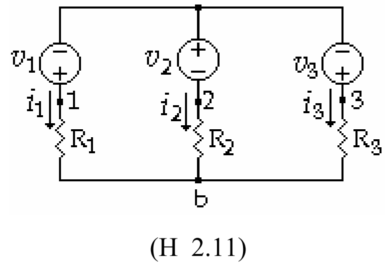
Hiệu thế giữa a &b chính là hiệu thế 2 đầu điện trở 3Ω

$v = 3i_3 = 2i_1 = 2i \qquad \Rightarrow \qquad R_{tđ} = \dfrac{v}{i} = 2\Omega$

2.3. định lý Millman

Định lý Millman giúp ta tính được hiệu thế hai đầu của một mạch gồm nhiều nhánh mắc song song.

Xét mạch (H 2.11), trong đó một trong các hiệu thế $V_{as} = V_a - V_s$ (s = 1,2,3) có thể triệt tiêu.



(H 2.11)

Định lý Millman áp dụng cho mạch (H 2.11) được phát biểu:

$$v_{ab} = \frac{\sum_s v_{as}.G_s}{\sum_s G_s} \qquad (2.7)$$

Với $G_s = \frac{1}{R_s}$ là điện dẫn ở nhánh s.

Chứng minh:

Gọi v_{sb} là hiệu thế hai đầu của R_s: $v_{sb} = v_{ab} - v_{as}$

Dòng điện qua R_s:

$$i_s = \frac{v_{sb}}{R_s} = \frac{v_{ab} - v_{as}}{R_s} = (v_{ab} - v_{as})G_s$$

Tại nút b : $\sum_s i_S = 0$

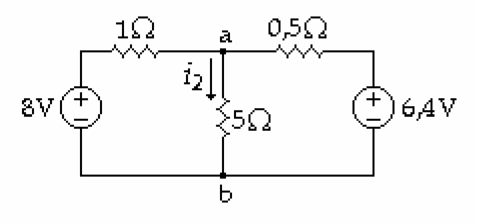
$$\sum_s (v_{ab} - v_{as})G_s = 0$$

Hay $v_{ab}\sum_s G_s = \sum_s v_{as}G_s$

$$v_{ab} = \frac{\sum_s v_{as}G_s}{\sum_s G_s}$$

Thí dụ 2.5

Dùng định lý Millman, xác định dòng điện i_2 trong mạch (H 2.12).



(H 2.12)

ta có $v_{ab} = \dfrac{\frac{8}{1} + \frac{6,4}{0,5}}{1 + \frac{1}{5} + 2} = \dfrac{8 + 12,8}{\frac{16}{5}}$

$v_{ab} = 6,5$ V

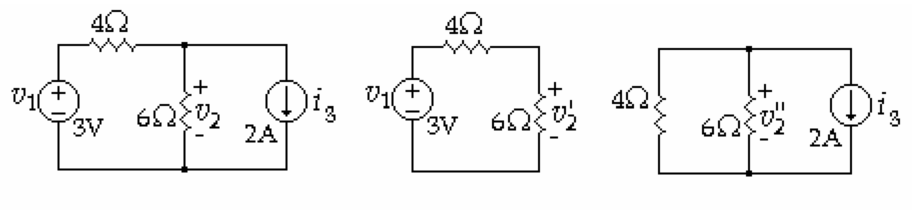
Vậy $i_2 = \frac{6,5}{5} = 1,3$ A

2.4. Định lý chồng chất (superposition theorem)

Định lý chồng chất là kết quả của tính chất tuyến tính của mạch: Đáp ứng đối với nhiều nguồn độc lập là tổng số các đáp ứng đối với mỗi nguồn riêng lẻ. Khi tính đáp ứng đối với một nguồn độc lập, ta phải triệt tiêu các nguồn kia (Nối tắt nguồn hiệu thế và để hở nguồn dòng điện, tức cắt bỏ nhánh có nguồn dòng điện), riêng nguồn phụ thuộc vẫn giữ nguyên.

Thí dụ 2.6

Tìm hiệu thế v_2 trong mạch (H 2.13a).



(a) (b) (c)

(H 2.13)

- Cho nguồn i_3 = 0A (để hở nhánh chứa nguồn 3A), ta có mạch (H 2.13b):

$$v'_2 = \frac{6}{4+6} v_1 = 1{,}8\text{V} \text{ (dùng cầu phân thế)}$$

- Cho nguồn v_1 = 0V (nối tắt nhánh chứa nguồn 3V), mạch (H 2.13c).

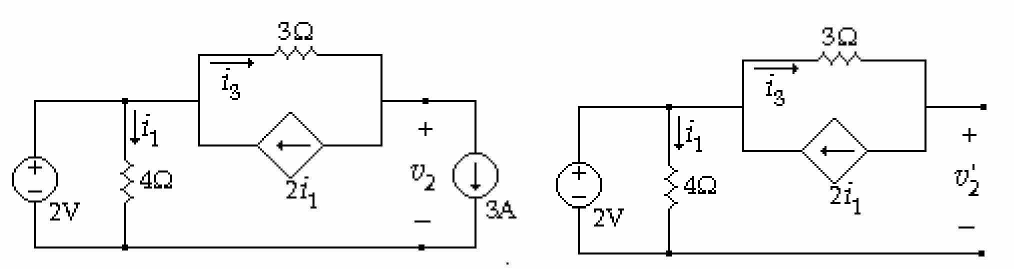
Dòng điện qua điện trở 6Ω: $\frac{4}{6+4} 2 = 0{,}8\text{A}$ (dùng cầu phân dòng)

$$v''_2 = -\ 0{,}8 \times 6 = -\ 4{,}8 \text{ V}$$

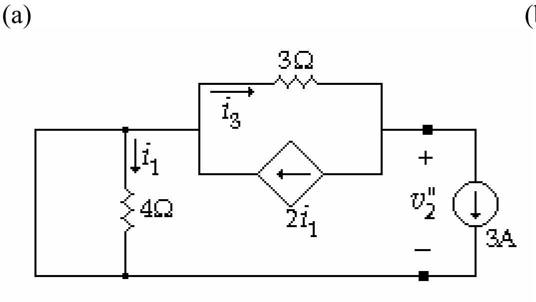
Vậy $v_2 = v'_2 + v''_2 = 1{,}8 - 4{,}8 = -\ 3\text{V}$

$$v_2 = -\ 3\text{V}$$

Thí dụ 2.7 Tính v_2 trong mạch (H 2.14a).



(a) (b)



(c)

(H 2.14)

Giải:

- Cắt nguồn dòng điện 3A, ta có mạch(H 2.14b).

$$i_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\text{A}$$

$$i_3 = 2i_1 = 1\text{A} \rightarrow v'_2 = 2 - 3i_3 = -1 \text{ V}$$

- Nối tắt nguồn hiệu thế 2 V, ta có mạch (H 2.14c).

Điện trở 4Ω bị nối tắt nên i_1 = 0 A

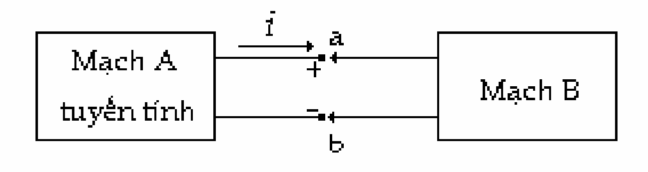
Vậy $i_3 = 3\text{A} \Rightarrow v''_2 = -\ 3 \times 3 = -\ 9 \text{ V}$

Vậy $v_2 = v'_2 + v''_2 = -1 - 9 = -10 \text{ V}$

2.5. Định lý Thevenin và Norton

Định lý này cho phép thay **một phần mạch phức tạp** bằng một **mạch đơn giản** chỉ gồm **một nguồn và một điện trở**.

Một mạch điện giả sử được chia làm hai phần (H 2.15)



(H 2.15)

Định lý Thevenin và Norton áp dụng cho những mạch thỏa các điều kiện sau:

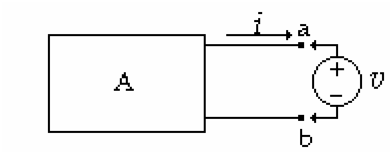
* Mạch A là mạch tuyến tính, chứa điện trở và nguồn.

* Mạch B có thể chứa thành phần phi tuyến.

* Nguồn phụ thuộc, nếu có, trong phần mạch nào thì chỉ phụ thuộc các đại lượng nằm trong phần mạch đó.

Định lý Thevenin và Norton cho phép chúng ta sẽ thay mạch A bằng một nguồn và một điện trở mà không làm thay đổi hệ thức v - i ở hai cực a & b của mạch .

Trước tiên, để xác định mạch tương đương của mạch A ta làm như sau: Thay mạch B bởi nguồn hiệu thế v sao cho không có gì thay đổi ở lưỡng cực ab (H2.16).

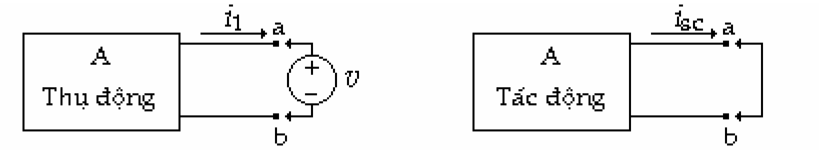


(H 2.16)

Áp dụng định lý chồng chất dòng điện i có thể xác địnhbởi:

$i = i_1 + i_{sc}$ (2.8)

Trong đó i_1 là dòng điện tạo bởi nguồn và mạch A đã triệt tiêu các nguồn độc lập (H2.17a) và i_{sc} là dòng điện tạo bởi mạch A với nguồn v bị nối tắt (short circuit, sc) (H2.17b).



(a) (H 2.17) (b)

- Mạch thụ động A, tương đương với điện trở R_{th}, gọi là điện trở Thevenin, xác định bởi:

$$i_1 = -\frac{v}{R_{th}} \quad (2.9)$$

Thay (2.9) vào (2.8)

$$i = -\frac{v}{R_{th}} + i_{sc} \quad (2.10)$$

Hệ thức (2.10) diễn tả mạch A trong trường hợp tổng quát nên nó đúng trong mọi trường hợp.

Trường hợp a, b để hở (Open circuit), dòng i = 0 A, phương trình (2.10) thành:

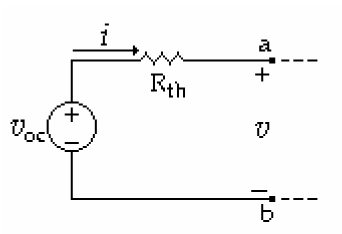
$$0 = -\frac{v_{oc}}{R_{th}} + i_{sc}$$

Hay $v_{oc} = R_{th} \,.\, i_{sc}$ (2.11)

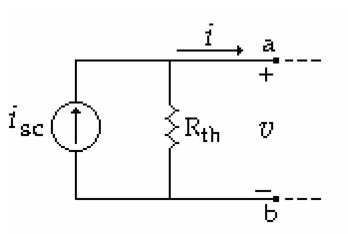
Thay (2.11) vào (2.10):

$$v = -R_{th} \,.\, i + v_{oc} \qquad (2.12)$$

Hệ thức (2.12) và (2.10) cho phép ta vẽ các mạch tương đương của mạch A (H 2.18) và (H 2.19)



(H 2.18)



(H 2.19)

* (H 2.18) được vẽ từ hệ thức (2.12) được gọi là mạch tương đương Thevenin của mạch A ở (H 2.15). Và nội dung của định lý được phát biểu như sau:

Một mạch lưỡng cực A có thể được thay bởi một nguồn hiệu thế v_{oc} nối tiếp với một điện trở R_{th}. Trong đó v_{oc} là hiệu thế của lưỡng cực A để hở và R_{th} là điện trở nhìn từ lưỡng cực khi triệt tiêu các nguồn độc lập trong mạch A (Giữ nguyên các nguồn phụ thuộc).

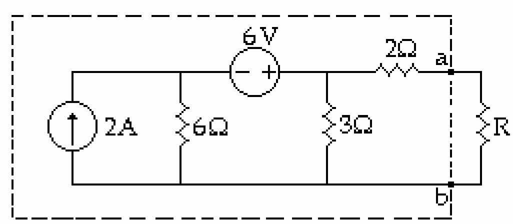
R_{th} còn được gọi là điện trở tương đương của mạch A thụ động.

* (H 2.19) được vẽ từ hệ thức (2.10) được gọi là mạch tương đương Norton của mạch A ở (H 2.15). Và định lý Norton được phát biểu như sau:

Một mạch lưỡng cực A có thể được thay thế bởi một nguồn dòng điện i_{sc} song song với điện trở R_{th}. Trong đó i_{sc} là dòng điện ở lưỡng cực khi nối tắt và R_{th} là điện trở tương đương mạch A thụ động.

Thí dụ 2.8

Vẽ mạch tương đương Thevenin và Norton của phần nằm trong khung của mạch (H2.20).



(H 2.20)

Giải:

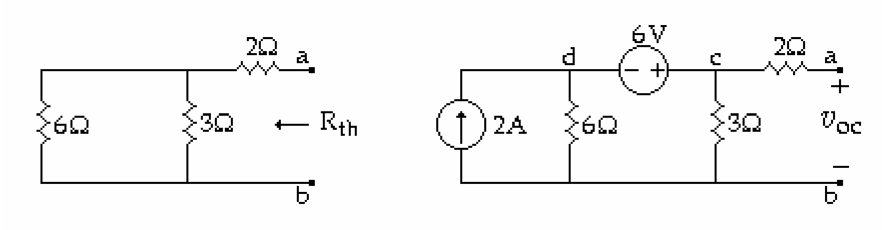
Để có mạch tương đương Thevenin, ta phải xác định được R_{th} và v_{oc}.

- Xác định R_{th}

R_{th} là điện trở nhìn từ ab của mạch khi triệt tiêu nguồn độc lập. (H 2.21a).

Từ (H 2.21a) :

$$R_{th} = 2 + \frac{6x3}{6+3} = 4\Omega$$



(a) (b)

(H 2.21)

✸ Xác định v_{oc}

v_{oc} là hiệu thế giữa a và b khi mạch hở (H 2.21b). Vì a, b hở, không có dòng qua điện trở 2Ω nên v_{oc} chính là hiệu thế v_{cb}. Xem nút b làm chuẩn ta có

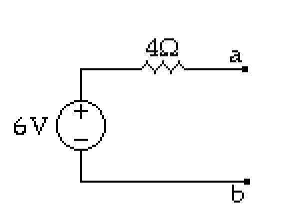
$v_d = - 6 + v_c = - 6 + v_{oc}$

Đ/L KCL ở nút b cho :

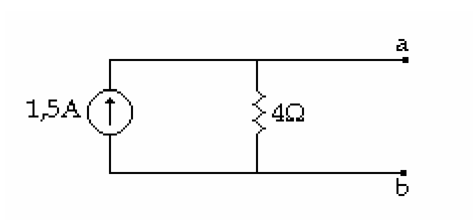
$$\frac{v_{oc}}{3} + \frac{v_{oc} - 6}{6} = 2A$$

Suy ra $v_{oc} = 6$ V

Vậy mạch tương đương Thevenin (H2.22)



(H 2.22)



(H 2.23)

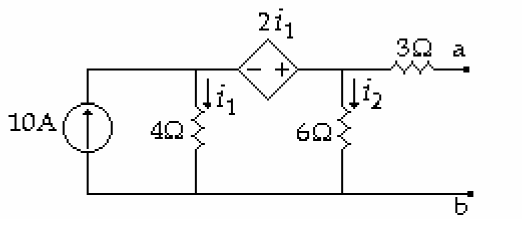
Để có mạch tương đương Norton, R_{th} đã có, ta phải xác định i_{sc}. Dòng i_{sc} chính là dòng qua ab khi nhánh này nối tắt. Ta có thể xác định từ mạch (H 2.20) trong đó nối tắt ab. Nhưng ta cũng có thể dùng hệ thức (2.11) để xác định i_{sc} theo v_{oc}:

$$i_{sc} = \frac{v_{oc}}{R_{th}} = \frac{6}{4} = 1{,}5A$$

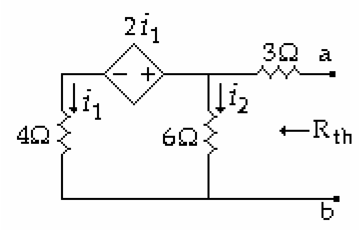
Vậy mạch tương đương Norton (H 2.23)

Thí dụ 2.9

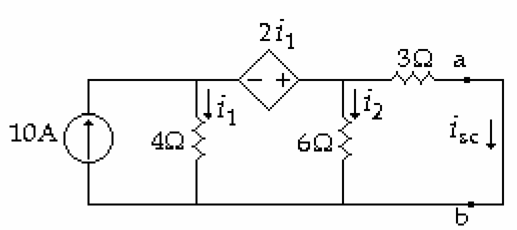
Vẽ mạch tương đương Norton của mạch (H 2.24a).



(a)



(b)



(c)

(H 2.24)

Ta tìm i_{sc} từ mạch (H 2.24c)

KCL ở nút b cho:

$$i_1 = 10 - i_2 - i_{sc}$$

Viết KVL cho 2 vòng bên phải:

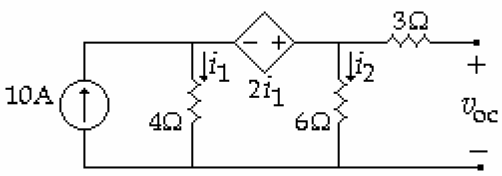
$$-4(10 - i_2 - i_{sc}) - 2i_1 + 6i_2 = 0$$

$$-6i_2 + 3i_{sc} = 0$$

Giải hệ thống cho $i_{sc} = 5$A

Để tính R_{th} ở (H 2.24b), do mạch có chứa nguồn phụ thuộc, ta có thể tính bằng cách áp vào a,b một nguồn v rồi xác định dòng điện i, để có $R_{th} = v/i$ (điện trở tương đương).

Tuy nhiên, ở đây ta sẽ tìm v_{oc} ở ab khi a,b để hở (H 2.25).



(H 2.25)

Ta có $v_{oc} = 6i_2$

Viết định luật KVL cho vòng chứa nguồn phụ thuộc :

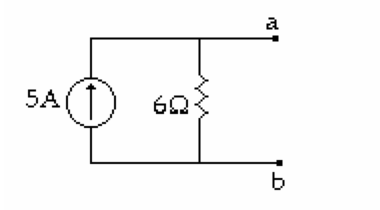
$$-4(10 - i_2) - 2\,i_1 + 6i_2 = 0$$

Hay $i_2 = 5$ A

và $v_{oc} = 6 \times 5 = 30$ V

Vậy $R_{th} = \dfrac{v_{oc}}{i_{sc}} = \dfrac{30}{5} = 6\Omega$

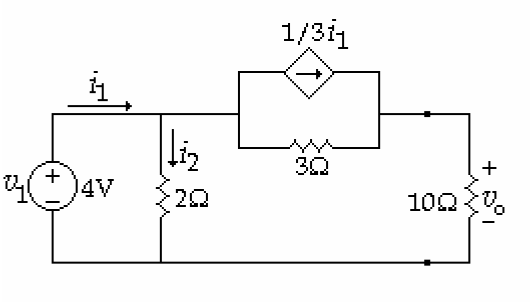
Mạch tương đương Norton:



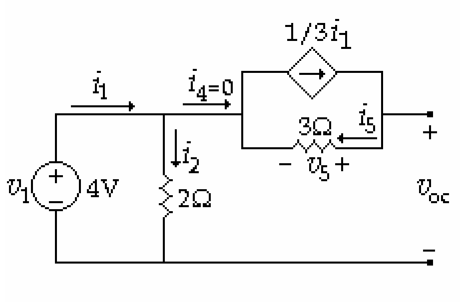
(H 2.26)

Thí dụ 2.10:

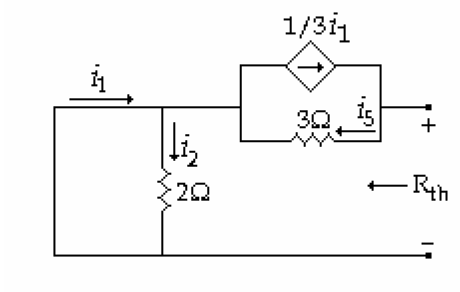
Tính v_o trong mạch (H 2.27a) bằng cách dùng định lý Thevenin

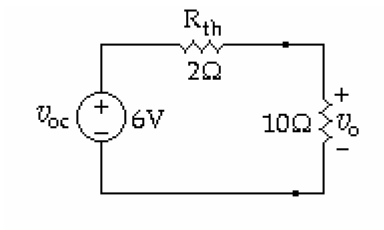


(a)



(b)





(c) (H 2.27) (d)

Để có mạch thụ động, nối tắt nguồn v_1 nhưng vẫn giữ nguồn phụ thuộc 1/3 i_1, ta có mạch (H 2.27c). Mạch này giống mạch (H 2.10) trong thí dụ 2.4; R_{th} chính là R_{td} trong thí dụ 2.4.

$R_{th} = 2\Omega$

Để tính v_{oc}, ta có mạch (H2.27b)

$v_{oc} = v_5 + v_1$

$v_5 = 3i_5$

$i_4 = 0$ A (mạch hở) nên:

$$i_5 = \frac{1}{3}i_1 = \frac{1}{3}x\frac{v_1}{2} = \frac{1}{3}x\frac{4}{2} = \frac{2}{3}\text{ A} \Rightarrow \quad v_{oc} = 3\frac{2}{3} + 4 = 6\text{ V}$$

$v_{oc} = 6$ V

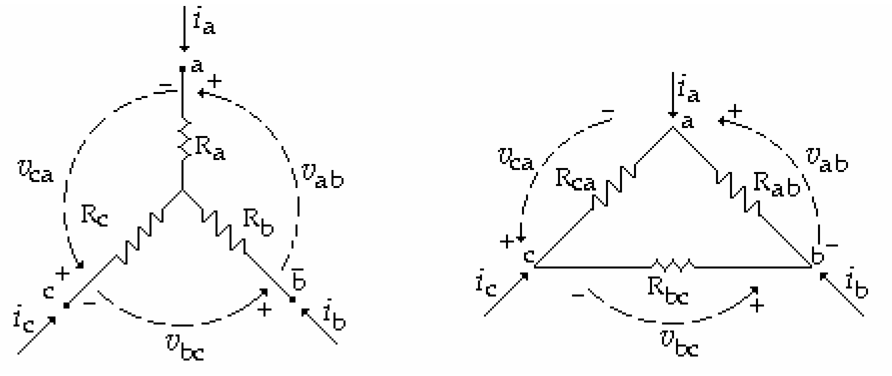
Mạch tương đương Thevenin vẽ ở (H 2.27d).

và $$v_o = \frac{v_{oc}}{2+10}10 = \frac{6}{12}10 = 5\text{ V}$$

$v_o = 5$ V

2.6. Biến đổi Δ - Y (Định lý Kennely).

Coi một mạch gồm 3 điện trở R_a, R_b, R_c nối nhau theo hình (Y), nối với mạch ngoài tại 3 điểm a, b, c điểm chung O (H 2.28a). Và mạch gồm 3 điện trở R_{ab}, R_{bc}, R_{ca} nối nhau theo hình tam giác (Δ), nối với mạch ngoài tại 3 điểm a, b, c (H 2.28b).



(H 2.28)

Hai mạch Δ và Y tương đương khi mạch này có thể thay thế mạch kia mà không ảnh hưởng đến mạch ngoài, nghĩa là các dòng điện i_a, i_b, i_c đi vào các nút a, b, c và các hiệu thế v_{ab},v_{bc}, v_{ca} giữa các nút không thay đổi.

- Biến đổi Δ ↔ Y là thay thế các mạch Δ bằng các mạch Y và ngược lại.

Người ta chứng minh được :

✧ **Biến đổi Y → Δ:**

$$R_{ab} = \frac{R_aR_b + R_bR_c + R_cR_a}{R_c}$$

$$R_{bc} = \frac{R_aR_b + R_bR_c + R_cR_a}{R_a} \qquad (2.13)$$

$$R_{ca} = \frac{R_aR_b + R_bR_c + R_cR_a}{R_b}$$

✧ **Biến đổi Δ → Y:**

$$R_a = \frac{R_{ab}.R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

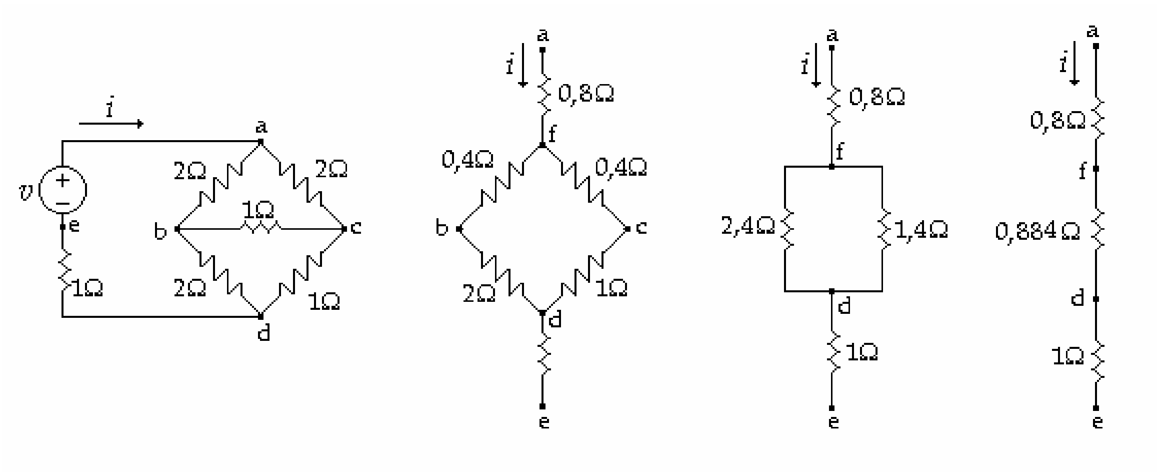
$$R_b = \frac{R_{ab}.R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} \qquad (2.14)$$

$$R_c = \frac{R_{bc}.R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

Nên thận trọng khi áp dụng biến đổi Δ ↔ Y. Việc áp dụng đúng phải cho mạch tương đương đơn giản hơn.

Thí dụ 2.11:

Tìm dòng điện *i* trong mạch (H 2.29a).



(a) (b) (c) (d)

(H 2.29)

- Biến đổi tam giác abc thành hình sao, ta được (H 2.29b) với các giá trị điện trở:

$$R_{af} = \frac{2x2}{2+2+1} = \frac{4}{5} = 0,8\Omega$$

$$R_{bf} = \frac{2x1}{5} = \frac{2}{5} = 0,4\Omega$$

$$R_{cf} = \frac{2x1}{5} = \frac{2}{5} = 0,4\Omega$$

- Điện trở tương đương giữa f và d:

$$\frac{1,4x2,4}{1,4+2,4} = 0,884\ \Omega$$

- Điện trở giữa a và e:

$$R_{ac} = 0,8 + 0,884 + 1 = 2,684\ \Omega$$

và dòng điện *i* trong mạch :

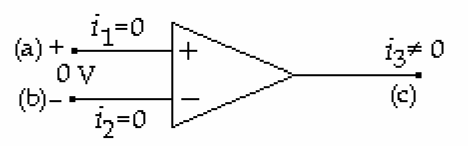
$$i = \frac{v}{R_{ac}} = \frac{v}{2,684}\ \text{A}$$

2.7 Mạch khuếch đại thuật toán (Operation amplifier, OPAMP)

Một trong những linh kiện điện tử quan trọng và thông dụng hiện nay là mạch khuếch đại thuật toán (OPAMP).

Cấu tạo bên trong mạch sẽ được giới thiệu trong một giáo trình khác. Ở đây chúng ta chỉ giới thiệu mạch OPAMP được dùng trong một vài trường hợp phổ biến với mục đích xây dựng những mạch tương đương dùng nguồn phụ thuộc cho nó từ các định luật Kirchhoff .

OPAMP là một mạch đa cực, nhưng để đơn giản ta chỉ để ý đến các ngõ vào và ngõ ra (bỏ qua các cực nối nguồn và Mass...). Mạch có hai ngõ vào (a) là ngõ vào không đảo, đánh dấu (+) và (b) là ngõ vào đảo đánh dấu (-), (c) là ngõ ra.



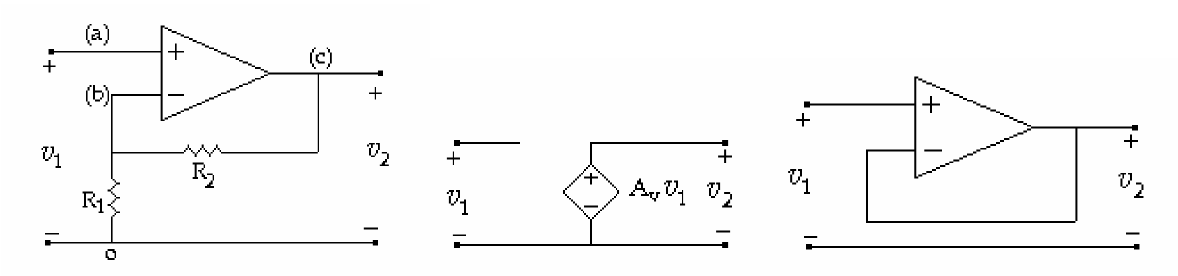
(H 2.30)

Mạch có nhiều đặc tính quan trọng , ở đây ta xét mạch trong điều kiện lý tưởng: i_1 và i_2 dòng điện ở các ngõ vào bằng không (tức tổng trở vào của mạch rất lớn) và hiệu thế giữa hai ngõ vào cũng bằng không .

Lưu ý là ta không thể dùng định luật KCL tổng quát cho mạch (H 2.30) được vì ta đã bỏ qua một số cực do đó mặc dù $i_1 = i_2 = 0$ nhưng $i_3 \neq 0$.

Mạch OPAMP lý tưởng có độ lợi dòng điện $\rightarrow \infty$ nên trong thực tế khi sử dụng người ta luôn dùng mạch hồi tiếp.

Trước tiên ta xét mạch có dạng (H 2.31a), trong đó R_2 là mạch hồi tiếp mắc từ ngõ ra (c) trở về ngã vào đảo (b), và mạch (H 2.31b) là mạch tương đương .



(a) (b) (c)

(H 2.31)

Để vẽ mạch tương đương ta tìm liên hệ giữa v_2 và v_1.

Áp dụng cho KVL cho vòng obco qua v_2

$v_{bc} + v_2 - v_{bo} = 0$

Hay $v_{bc} = v_{bo} - v_2 = v_1 - v_2$ ($v_{bo} = v_1$)

Áp dụng KCL ở nút b:

$$\frac{v_{bo}}{R_1} + \frac{v_{bc}}{R_2} = \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} = 0$$

Giải phương trình cho: $v_2 = A_v\, v_1$ với $A_v = 1 + \dfrac{R_2}{R_1}$

Ta có mạch tương đương (H 2.31b), trong đó A_v là độ lợi điện thế.

Xét trường hợp đặc biệt $R_2 = 0\Omega$ và $R_1 = \infty$, $A_v = 1$ và $v_2 = v_1$ (H 2.31c) mạch không có tính khuếch đại và được gọi là mạch đệm (Buffer), có tác dụng biến đổi tổng trở.

Một dạng khác của mạch OP-AMP vẽ ở (H 2.32a)

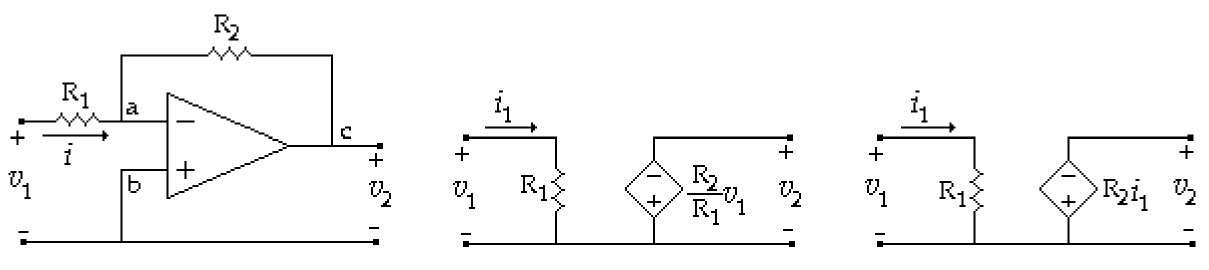
Ap dụng KCL ở ngã vào đảo.

$$-\frac{v_1}{R_1} - \frac{v_2}{R_2} = 0 \text{ hay } v_2 = -\frac{R_2}{R_1} v_1$$

Ta thấy v_2 có pha đảo lại so với v_1 nên mạch được gọi là mạch đảo.

Mạch tương đương vẽ ở (H 2.31b), dùng nguồn hiệu thế phụ thuộc hiệu thế .

Nếu thay $\frac{v_1}{R_1} = i_1$, ta được mạch tương đương (H 2.32c), trong đó nguồn hiệu thế phụ thuộc hiệu thế đã được thay bằng nguồn hiệu thế phụ thuộc dòng điện .



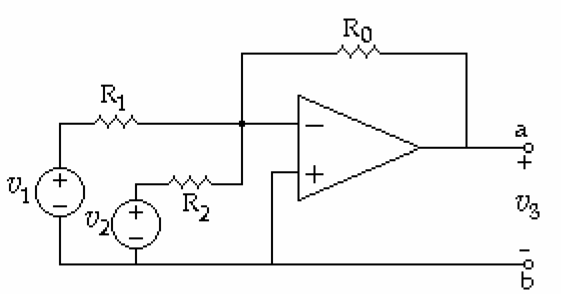
(a) (b) (c)

(H 2.32)

BÀI TẬP

--o0o--

2.1. Cho mạch (H P2.1)

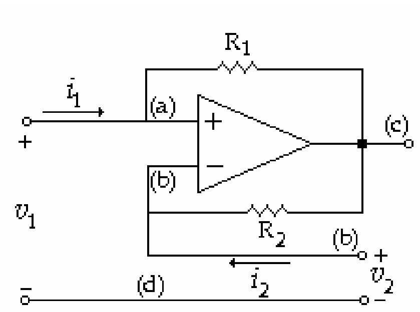


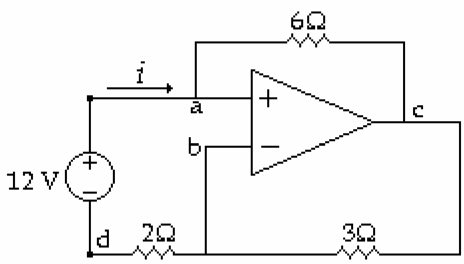
(H P2.1)

Chứng minh: $v_3 = -R_0\left(\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2}\right)$

Lưu ý là v_3 không phụ thuộc vào thành phần mắc ở a, b.
Đây là một trong các mạch làm toán và có tên là **mạch cộng**.

2.2. Cho mạch (H P2.2a)



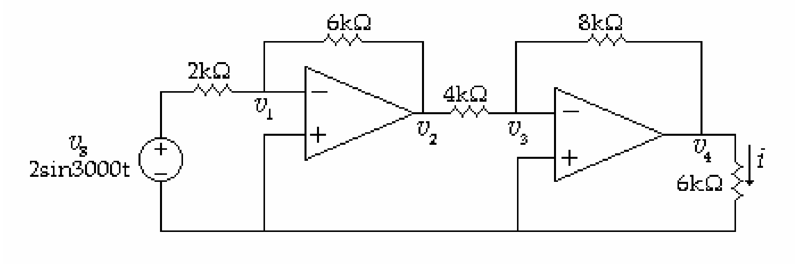


(H P2.2a) (H P2.2b)

Chứng minh rằng ta luôn có: $v_1 = v_2$ và $i_1 = \frac{R_2}{R_1} i_2$

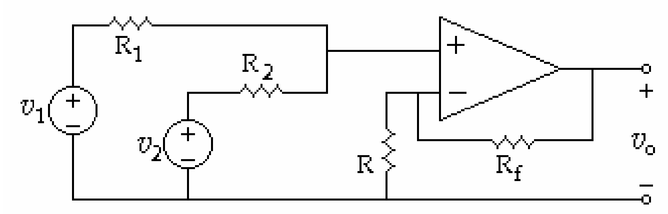
Với bất kỳ thành phần nối vào b,d.
Áp dụng kết quả trên vào mạch (H P2.2b) để xác định dòng điện *i*.

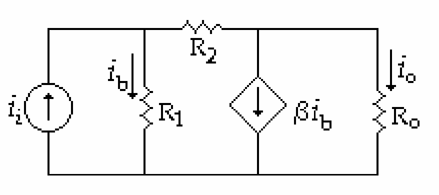
2.3. Tìm dòng điện *i* trong mạch (H P2.3).



(H P2.3)

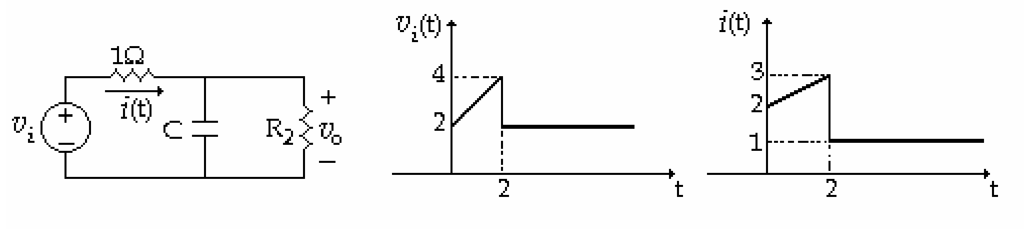
2.4. Cho mạch (H P2.4)
a/ Tính v_o.
b/ Áp dụng bằng số v_1 = 3 V, v_2 = 2 V, R_1 = 4KΩ, R_2 = 3KΩ, R_f = 6KΩ và R = 1KΩ.
2.5. (H P2.5) là mạch tương đương của một mạch khuếch đại transistor.
Dùng định lý Thevenin hoặc Norton để xác định i_o/i_i (độ lợi dòng điện).





(H P2.4) (H P2.5)

2.6. Cho mạch (H P2.6a). Tìm các giá trị C và R_2 nếu $v_i(t)$ và $i(t)$ có dạng như (H P2.6b) và (H P2.6c).

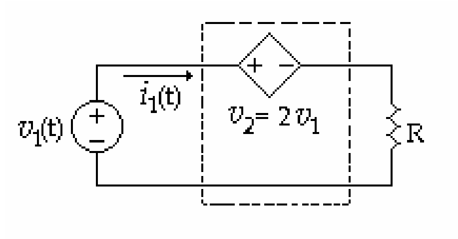


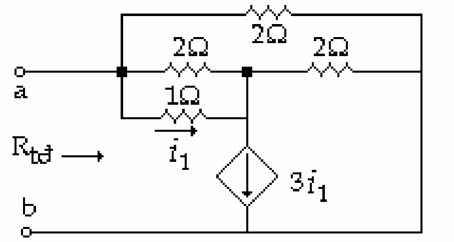
(a) (b) (c)

(H P2.6)

2.7 Tính $\frac{v_1(t)}{i_1(t)}$ trong mạch (H P2.7) và thử đặt tên cho phần mạch nằm trong khung kẻ nét gián đoạn.

2.8. Tính R_{td} của (H P2.8).

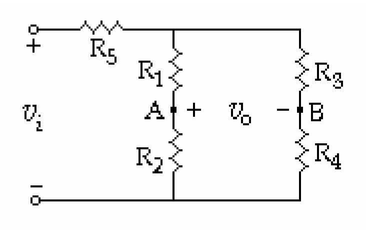


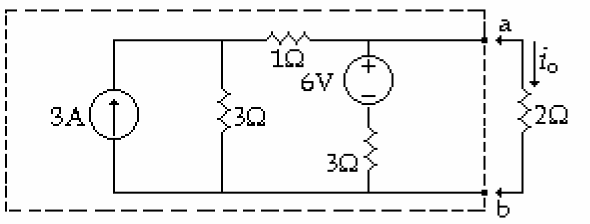


(H P2.7) (H P2.8)

2.9. Cho mạch (H P2.9), tìm điều kiện để $v_o = 0$.

2.10. Thay thế mạch điện trong khung của (H P2.10) bằng mạch tương đương Thevenin sau đó tính i_o.

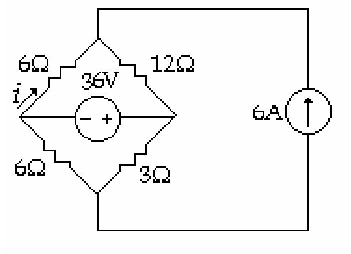


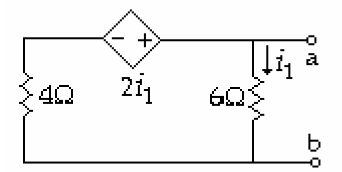


(H P2.9) (H P2.10)

2.11. Dùng định lý chồng chất xác định dòng *i* trong mạch (H P2.11).

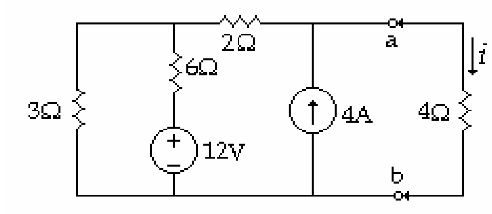
2.12 Tìm mạch tương đương của mạch (H P2.12).

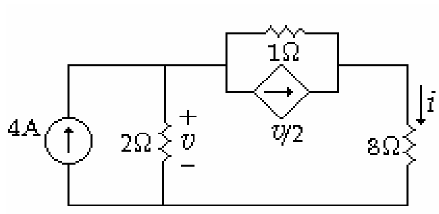




(H P2.11) (H P2.12)

2.13. Dùng định lý Thevenin xác định dòng *i* trong mạch (H P2.14).

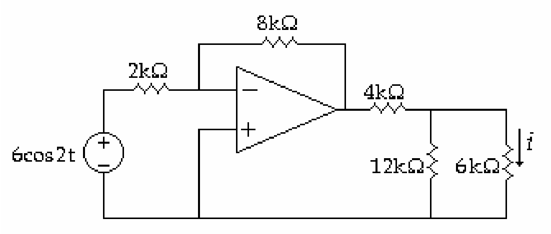




(H P2.13) (H P2.14)

2.14. Dùng định lý Norton xác định dòng *i* của mạch (H P2.1).

2.15. Dùng định lý Norton (hay Thevenin) xác định dòng *i* trong mạch (H P2.16).



(H P2.15)

◎ Chương 3

PHƯƠNG TRÌNH MẠCH ĐIỆN

✸ **KHÁI NIỆM VỀ TOPO**
- Một số định nghĩa
- Định lý về topo mạch

✸ **PHƯƠNG TRÌNH NÚT**
- Mạch chứa nguồn dòng điện
- Mạch chứa nguồn hiệu thế

✸ **PHƯƠNG TRÌNH VÒNG**
- Mạch chứa nguồn hiệu thế
- Mạch chứa nguồn dòng điện

✸ **BIẾN ĐỔI VÀ CHUYỂN VỊ NGUỒN**
- Biến đổi nguồn
- Chuyển vị nguồn

Trong chương này, chúng ta giới thiệu một phương pháp tổng quát để giải các mạch điện tương đối phức tạp. Đó là các hệ phương trình nút và phương trình vòng. Chúng ta cũng đề cập một cách sơ lược các khái niệm cơ bản về Topo mạch, phần này giúp cho việc thiết lập các hệ phương trình một cách có hiệu quả.

3.1 Khái niệm về Topo MẠCH

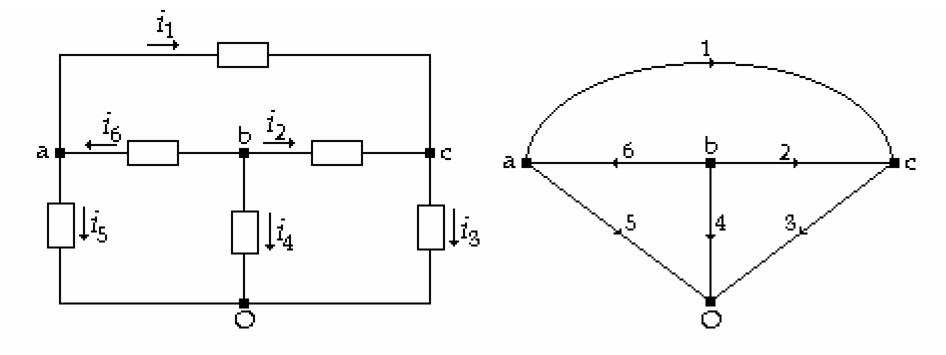
Trong một mạch, ẩn số chính là dòng điện và hiệu thế của các nhánh. Nếu mạch có B nhánh ta có 2B ẩn số và do đó cần 2B phương trình độc lập để giải. Làm thế nào để viết và giải 2B phương trình này một cách có hệ thống và đạt được kết quả chính xác và nhanh nhất, đó là mục đích của phần Topo mạch.

Topo mạch chỉ để ý đến cách nối nhau của các phần tử trong mạch mà không để ý đến bản chất của chúng.

3.1.1. Một số định nghĩa

▪ Giản đồ thẳng

Để vẽ giản đồ thẳng tương ứng của một mạch ta thay các nhánh của mạch bởi các đoạn thẳng (hoặc cong) và các nút bởi các dấu chấm.



(a) (b)

(H 3.1)

Trong giản đồ các nhánh và nút được đặt tên hoặc đánh số thứ tự. Nếu các nhánh được định hướng (thường ta lấy chiều dòng điện trong nhánh định hướng cho giản đồ), ta có giản đồ hữu hướng.

(H 3.1b) là giản đồ định hướng tương ứng của mạch (H 3.1a).

▪ Giản đồ con

Tập hợp con của tập hợp các nhánh và nút của giản đồ.

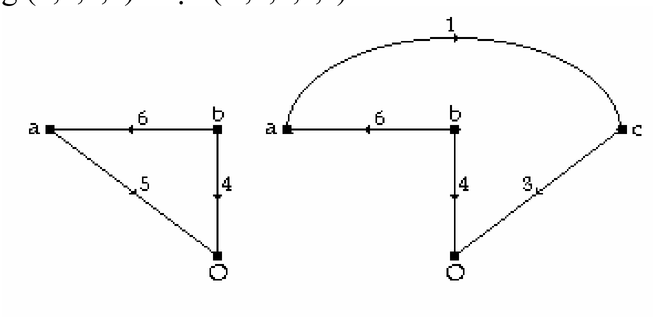
▪ Vòng

Giản đồ con khép kín. Mỗi nút trong một vòng phải nối với hai nhánh trong vòng đó. Ta gọi tên các vòng bằng tập hợp các nhánh tạo thành vòng hoặc tập hợp các nút thuộc vòng đó.

Thí dụ:

(H 3.2a): Vòng (4,5,6) hoặc (a,b,o,a).

(H 3.2b): Vòng (1,6,4,3) hoặc (a,b,o,c,a).



(a) (b)

(H 3.2)

▪ Cây

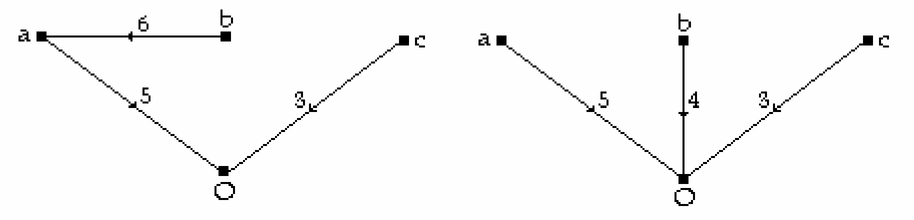
Giản đồ con chứa tất cả các nút của giản đồ nhưng không chứa vòng.

Một giản đồ có thể có nhiều cây.

Thí dụ:

(H 3.3a): Cây 3,5,6 ;

(H 3.3b): Cây 3,4,5 . . ..

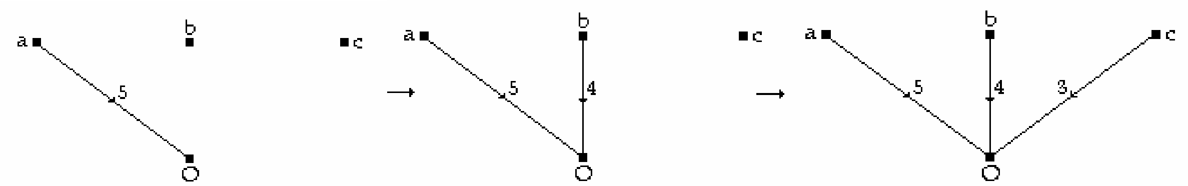


(a) (b)

(H 3.3)

* **Cách vẽ một cây**: Nhánh thứ nhất được chọn nối với 2 nút, nhánh thứ hai nối 1 trong hai nút này với nút thứ 3 và nhánh theo sau lại nối một nút nữa vào các nút trước. Như vậy khi nối N nút, cây chứa N-1 nhánh.

Thí dụ để vẽ cây của (H 3.3b) ta lần lượt làm từng bước theo (H 3.4).



(H 3.4)

Để phân biệt nhánh của cây với các nhánh khác trong giản đồ, người ta gọi nhánh của cây là **cành** và các nhánh còn lại gọi là **nhánh nối**. Cành và nhánh nối chỉ có ý nghĩa sau khi đã chọn cây.

Gọi L là số nhánh nối ta có:

B = (N - 1) + L

Hay L = B - N +1 (3.1)

Trong đó B là số nhánh của giản đồ, N là số nút.

Trong giản đồ trên hình 3.1 : B = 6, N = 4 vậy L = 6 - 4 + 1 = 3

Nhận thấy, một cây nếu thêm một nhánh nối vào sẽ tạo thành một vòng độc lập (là vòng chứa ít nhất một nhánh không thuộc vòng khác).

Vậy số vòng độc lập của một giản đồ chính là số nhánh nối L.

3.1.2. Định lý về Topo mạch

Nhắc lại, một mạch gồm B nhánh cần 2B phương trình độc lập để giải, trong đó B phương trình là hệ thức *v* - *i* của các nhánh, vậy còn lại B phương trình phải được thiết lập từ định luật Kirchhoff .

▪ Định lý 1:

Giản đồ có N nút, có (N -1) phương trình độc lập do định luật KCL viết cho (N-1) nút của giản đồ.

Thật vậy, phương trình viết cho nút thứ N có thể suy từ (N-1) phương trình kia.

▪ Định lý 2

Hiệu thế của các nhánh (tức giữa 2 nút) của giản đồ có thể viết theo (N-1) hiệu thế độc lập nhờ định luật KVL.

Thật vậy, một cây nối tất cả các nút của giản đồ, giữa hai nút bất kỳ luôn có một đường nối chỉ gồm các cành của cây, do đó hiệu thế giữa hai nút có thể viết theo hiệu thế của các cành của cây. Một cây có (N - 1) cành, vậy hiệu thế của một nhánh nào của giản đồ cũng có thể viết theo (N-1) hiệu thế độc lập của các cành.

Trong thí dụ của (H 3.1), cây gồm 3 nhánh 3, 4, 5 đặc biệt quan trọng vì các cành của nó nối với một nút chung O, **O gọi là nút chuẩn**. Hiệu thế của các cành là hiệu thế giữa các nút a, b, c (so với nút chuẩn). Tập hợp (N - 1) hiệu thế này được gọi là **hiệu thế nút**.

Nếu mạch không có đặc tính như trên thì ta có thể chọn một nút bất kỳ làm nút chuẩn.

▪ Định lý 3

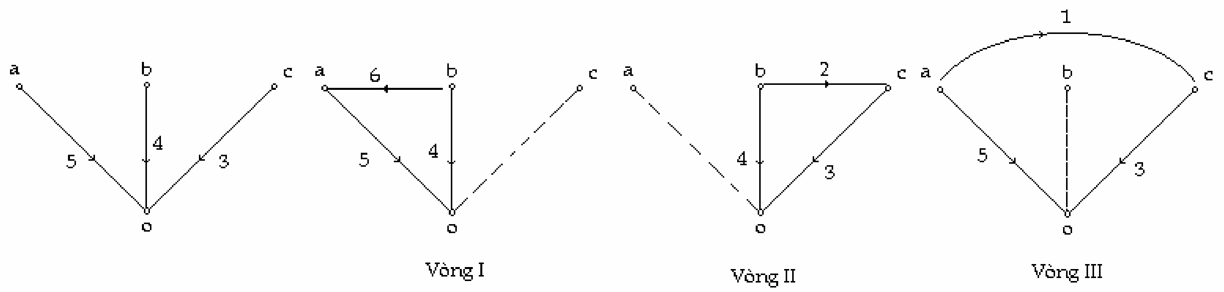
Ta có L = B - N +1 vòng hay mắt lưới độc lập với nhau, trong đó ta có thể viết phương trình từ định luật KVL.

▪ Định lý 4

Mọi dòng điện trong các nhánh có thể được viết theo L = B - N +1 dòng điện độc lập nhờ định luật KCL.

Các vòng độc lập có được bằng cách chọn một cây của giản đồ, xong cứ thêm 1 nhánh nối vào ta được 1 vòng. Vòng này chứa nhánh nối mới thêm vào mà nhánh này không thuộc một vòng nào khác. Vậy ta có L = B - N + 1 vòng độc lập. Các dòng điện chạy trong các nhánh nối hợp thành một tập hợp các dòng điện độc lập trong mạch tương ứng .

Thí dụ: Trong giản đồ (H 3.1b), nếu ta chọn cây gồm các nhánh 3,4,5 thì ta được các vòng độc lập sau đây:



(H 3.5)

Một phương pháp khác để xác định vòng độc lập là ta chọn các mắt lưới trong một giản đồ phẳng (giản đồ mà các nhánh chỉ cắt nhau tại các nút). Mắt lưới là một vòng không chứa vòng nào khác. Trong giản đồ (H 3.1b) mắt lưới là các vòng gồm các nhánh: (4,5,6), (2,3,4) & (1,2,6).

Một mắt lưới luôn luôn chứa một nhánh không thuộc mắt lưới khác nên nó là một vòng độc lập và số mắt lưới cũng là L.

Các định lý trên cho ta đủ B phương trình để giải mạch :

Gồm (N-1) phương trình nút và (L = B - N + 1) phương trình vòng.

Và tổng số phương trình là:

$$(N-1) + L = N - 1 + B - N + 1 = B$$

3.2 Phương trình Nút

3.2.1 Mạch chỉ chứa điện trở và nguồn dòng điện

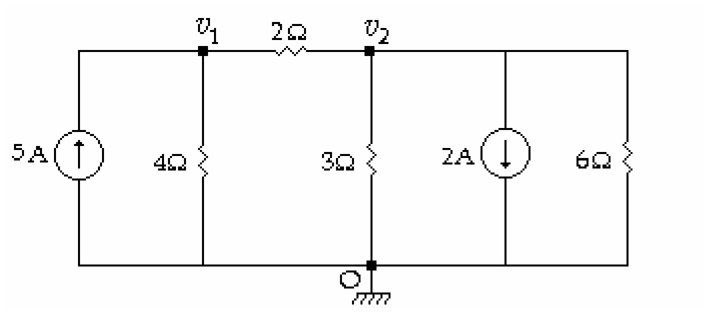
Trong trường hợp ngoài điện trở ra, mạch chỉ chứa nguồn dòng điện thì viết phương trình nút cho mạch là biện pháp dễ dàng nhất để giải mạch. Chúng ta luôn có thể viết phương trình một cách trực quan, tuy nhiên nếu trong mạch có nguồn dòng điện phụ thuộc thì ta cần có thêm các hệ thức diễn tả quan hệ giữa các nguồn này với các ẩn số của phương trình mới đủ điều kiện để giải mạch.

▪ Nguồn dòng điện độc lập:

Nếu mọi nguồn trong mạch đều là nguồn dòng điện độc lập, tất cả dòng điện chưa biết có thể tính theo (N - 1) điện thế nút. Ap dụng định luật KCL tại (N - 1) nút, trừ nút chuẩn, ta được (N - 1) phương trình độc lập. Giải hệ phương trình này để tìm hiệu thế nút. Từ đó suy ra các hiệu thế khác.

Thí dụ 3.1:

Tìm hiệu thế ngang qua mỗi nguồn dòng điện trong mạch (H 3.6)



(H 3.6)

Mạch có 3 nút 1, 2, O; N = 3 vậy N - 1 = 2, ta có 2 phương trình độc lập.

Chọn nút O làm chuẩn, 2 nút còn lại là 1 và 2 . v_1 và v_2 chính là hiệu thế cần tìm.

Viết KCL cho nút 1 và 2.

Nút 1: $-5+\frac{v_1}{4}+\frac{v_1-v_2}{2}=0$ (1)

Nút 2: $\frac{v_2-v_1}{2}+\frac{v_2}{3}+\frac{v_2}{6}+2=0$ (2)

Thu gọn:

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)v_1-\frac{1}{2}v_2=5 \quad (3)$$

$$-\frac{1}{2}v_1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)v_2=-2 \quad (4)$$

Giải hệ thống (3) và (4), ta được :

v_1 = 8 (V) và **v_2 = 2 (V)**

- **Thiết lập phương trình nút cho trường hợp tổng quát**

Xét mạch chỉ gồm điện trở R và nguồn dòng điện độc lập, có N nút. Nếu không kể nguồn dòng điện nối giữa hai nút j và k, tổng số dòng điện rời nút j đến nút k luôn có dạng:

$G_{jk}(v_j - v_k)$ (3.2)

G_{jk} là tổng điện dẫn nối trực tiếp giữa hai nút j , k (j ≠ k) gọi là điện dẫn chung giữa hai nút j , k ; ta có:

$G_{jk} = G_{kj}$ (3.3)

Gọi i_j là tổng đại số các nguồn dòng điện nối với nút j.

Định luật KCL áp dụng cho nút j:

$$\sum_k G_{jk}(v_j - v_k) = i_j \qquad (i_j > 0 \text{ khi đi vào nút j})$$

Hay $v_j\sum_k G_{jk}-\sum_k G_{jk}v_k = i_j \quad (j \neq k)$ (3.4)

$\sum_k G_{jk}$: Là tổng điện dẫn của các nhánh có một đầu tại nút j. Ta gọi chúng là điện dẫn riêng của nút j và ký hiệu:

$$G_{jj}=\sum_k G_{jk} \quad (3.5)$$

Phương trình (3.4) viết lại:

$$G_{jj}v_j-\sum_k G_{jk}v_k = i_j \quad (j\neq k) \quad (3.6)$$

Viết phương trình (3.6) cho (N - 1) nút (j = 1, ..., N - 1), ta được hệ thống phương trình

Nút 1: $G_{11}v_1 - G_{12}v_2 - G_{13}v_3 \ldots - G_{1(.N-1)}v_{N-1} = i_1$

Nút 2: $- G_{21}v_1 + G_{22}v_2 - G_{23}v_3 \ldots - G_{2.(N-1)}v_{N-1} = i_2$

:

:

:

Nút N -1: $- G_{(N-1).1}v_1 - G_{(N-1).2}v_2 \ldots + G_{(N-1)(.N-1)}v_{N-1} = i_{N-1}$

Dưới dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & -G_{12} & \ldots\ldots\ldots\ldots -G_{1.N-1} \\ -G_{21} & G_{22} & \ldots\ldots\ldots\ldots -G_{2.N-1} \\ : & : & : \\ : & : & : \\ : & : & : \\ -G_{N-1.1} & -G_{N-1.2} & \ldots\ldots\ldots\ldots G_{N-1.N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ : \\ : \\ : \\ v_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ : \\ : \\ : \\ i_{N-1} \end{bmatrix}$$

Hay

$$[G][V] = [I] \qquad (3.7)$$

[G]: Gọi là ma trận điện dẫn các nhánh, ma trận này có các phần tử đối xứng qua đường chéo chính và các phần tử có thể viết một cách trực quan từ mạch điện .
[V]: Ma trận hiệu thế nút, phần tử là các hiệu thế nút.
[I]: Ma trận nguồn dòng điện độc lập, phần tử là các nguồn dòng điện nối với các nút, có giá trị dương khi đi vào nút.

Trở lại **thí dụ 3.1**:

$$G_{11} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \quad ; \quad G_{22} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \quad ; \quad G_{12} = \frac{1}{2}$$

$i_1 = 5$A và $i_2 = -2$A

Hệ phương trình thành:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

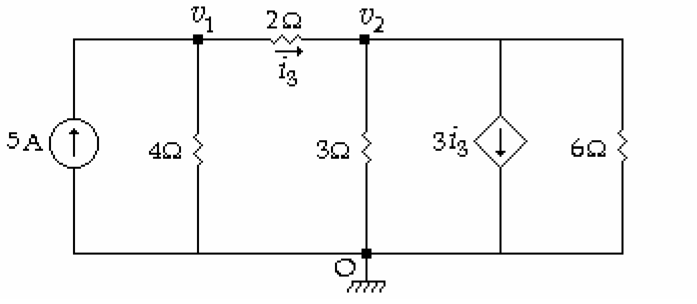
Ta được kết quả như trên.

▪ Nguồn dòng điện phụ thuộc :

Phương pháp vẫn như trên nhưng khi viết hệ phương trình nút trị số của nguồn dòng điện này phải được viết theo hiệu thế nút để giới hạn số ẩn số vẫn là N-1. Trong trường hợp này ma trận điện dẫn của các nhánh mất tính đối xứng.

Thí dụ: 3.2

Tín hiệu thế ngang qua các nguồn trong mạch (H 3.7).



(H 3.7)

Ta có thể viết phương trình nút một cách trực quan:

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)v_1-\frac{1}{2}v_2=5\\ -\frac{1}{2}v_1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)v_2=-3i_3\end{cases} \qquad (1)$$

Hệ thống có 3 ẩn số, như vậy phải viết i_3 theo v_1 và v_2.

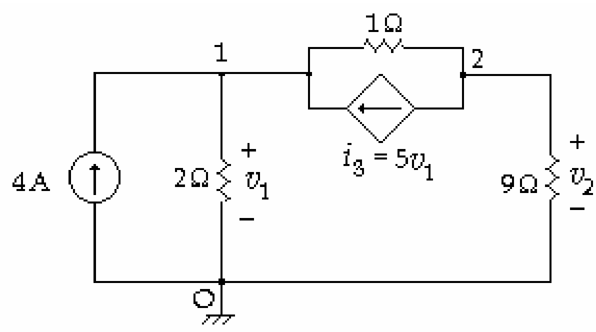
$$i_3=\frac{v_1-v_2}{2} \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) và sắp xếp lại

$$\frac{3}{4}v_1-\frac{1}{2}v_2=5 \;\&\; v_1-\frac{1}{2}v_2=0$$

$\Rightarrow$ **v_1 = - 20 (V)** và **v_2 = - 40 (V)**

Thí dụ 3.3
Tính v_2 trong mạch (H 3.8).



(H 3.8)

Chọn nút chuẩn O, v_1 & v_2 như trong (H 3.8)
Hệ phương trình nút là:

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{2}+1\right)v_1-v_2=4+i_3\\ -v_1+\left(1+\frac{1}{9}\right)v_2=-i_3\end{cases} \qquad (1)$$

Với $\quad i_3 = 5v_1$ (2)

Ta được :

$$\begin{cases}-\frac{7}{2}v_1-v_2=4\\ 4v_1+\frac{10}{9}v_2=0\end{cases} \qquad (3)$$

Suy ra :

v_2 = - 114 (V)

3.2.2 Mạch chỉ chứa điện trở và nguồn hiệu thế

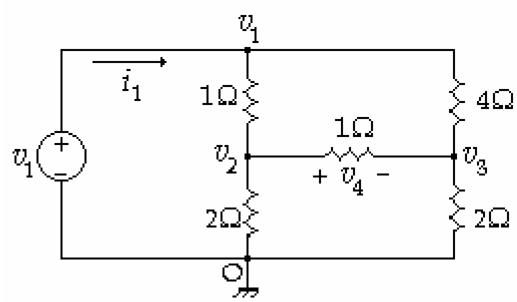
▪ Nguồn hiệu thế độc lập

Nếu một nhánh của mạch là 1 nguồn hiệu thế độc lập, dòng điện trong nhánh đó không thể tính dễ dàng theo hiệu thế nút như trước. Vì hiệu thế của nguồn không còn là ẩn số nên chỉ còn (N-2) thay vì (N-1) hiệu thế chưa biết, do đó ta chỉ cần (N-2) phương trình nút, viết nhờ định luật KCL để giải bài toán. Để có (N-2) phương trình này ta tránh 2 nút nối với nguồn hiệu thế thì dòng điện chạy qua nguồn này không xuất hiện.

Cuối cùng, để tìm dòng điện chạy trong nguồn hiệu thế, ta áp dụng định luật KCL tại nút liên hệ với dòng điện còn lại này, sau khi tính được các dòng điện trong các nhánh tại nút này.

Thí dụ 3.4

Tính v_4 và điện trở tương đương nhìn từ 2 đầu của nguồn hiệu thế v_1 trong (H 3.9).



(H 3.9)

Mạch có N = 4 nút và một nguồn hiệu thế độc lập. Chọn nút chuẩn O và nút v_1 nối với nguồn $v_1 = 6$ V nên ta chỉ cần viết hai phương trình cho nút v_2 và v_3.

Viết KCL tại nút 2 và 3.

$$\begin{cases} \dfrac{v_2-6}{1}+\dfrac{v_2}{2}+\dfrac{v_2-v_3}{1}=0 \\ \dfrac{v_3-v_2}{1}+\dfrac{v_3-6}{4}+\dfrac{v_3}{2}=0 \end{cases} \qquad (1)$$

Thu gọn:

$$\begin{cases} \dfrac{5}{2}v_2-v_3=6 \\ -v_2+\dfrac{7}{4}v_3=\dfrac{3}{2} \end{cases} \qquad (2)$$

Giải hệ thống (2):

$$v_2 = \frac{32}{9}\ \text{V} \qquad \text{và} \qquad v_3 = \frac{26}{9}\ \text{V}$$

$$\Rightarrow \qquad v_4 = v_2 - v_3 = \frac{2}{3}\ \text{V}$$

Dòng i_1 là tổng các dòng qua điện trở 1Ω và 4Ω.

$$i_1 = \frac{6-v_2}{1}+\frac{6-v_3}{4}=\frac{22}{9}+\frac{7}{9}=\frac{29}{9}\ \text{A}$$

Điện trở tương đương:

$$R_{tđ} = \frac{6}{\frac{29}{9}} = \frac{54}{29}\Omega$$

$$\mathbf{R_{tđ}} = \mathbf{\frac{54}{29}}\Omega$$

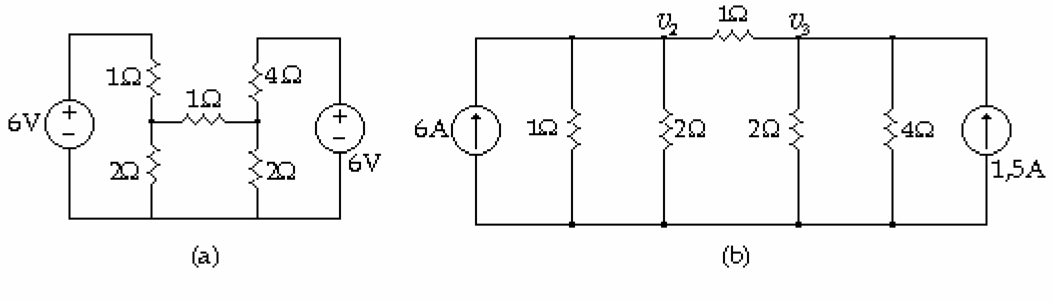
Chúng ta chưa tìm được một phương pháp tổng quát để viết thẳng các phương trình nút trong những mạch có chứa nguồn hiệu thế.

Trong thực tế nguồn hiệu thế thường được mắc nối tiếp với một điện trở (chính là nội trở của nguồn) nên ta có thể biến đổi thành nguồn dòng điện mắc song song với điện trở đó (biến đổi Thevenin, Norton).

Nếu nguồn hiệu thế không mắc nối tiếp với điện ta phải dùng phương pháp chuyển vị nguồn trước khi biến đổi (đề cập ở trong một phần sau).

Sau các biến đổi, mạch đơn giản hơn và chỉ chứa nguồn dòng điện và ta có thể viết hệ phương trình một cách trực quan như trong phần 3.2.1.

Trong thí dụ 3.3 ở trên, mạch (H 3.9) có thể vẽ lại như ở (H 3.10a) mà không có gì thay đổi và biến các nguồn hiệu thế nối tiếp với điện trở thành các nguồn dòng song song với điện trở ta được (H 3.10b).



(H 3.10)

Và phương trình nút:

$$\left(1+\frac{1}{2}+1\right)v_2 - v_3 = 6$$

$$-v_2 + \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1\right)v_3 = 1{,}5$$

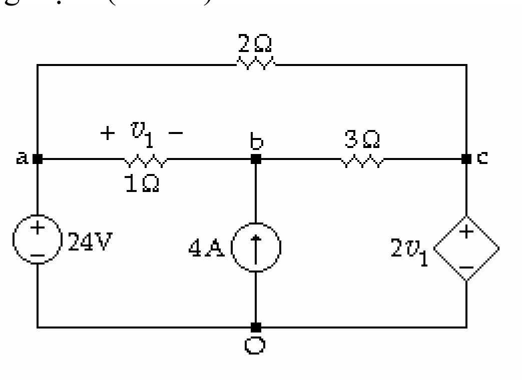
Giải hệ thống ta tìm lại được kết quả trên.

▪ Nguồn hiệu thế phụ thuộc :

Ta cần một phương trình phụ bằng cách viết hiệu thế của nguồn phụ thuộc theo hiệu thế nút.

Thí dụ 3.5

Tìm hiệu thế v_1 trong mạch (H 3.11)



(H 3.11)

Mạch có 4 nút và chứa 2 nguồn hiệu thế nên ta chỉ cần viết 1 phương trình nút cho nút b. Chọn nút O làm chuẩn, phương trình cho nút b là:

$$\frac{v_b - 24}{1} + \frac{v_b - 2v_1}{3} - 4 = 0 \qquad (1)$$

Với phương trình phụ là quan hệ giữa nguồn phụ thuộc và các hiệu thế nút:

$v_b = 24 - v_1$ (2)

Thay (2) vào (1), sau khi đơn giản:

$\boldsymbol{v_1 = 2}$ **(V)**

3.3 Phương trình Vòng

Mạch có B nhánh, N nút có thể viết L = B - N + 1 phương trình vòng độc lập . Mọi dòng điện có thể tính theo L dòng điện độc lập này.

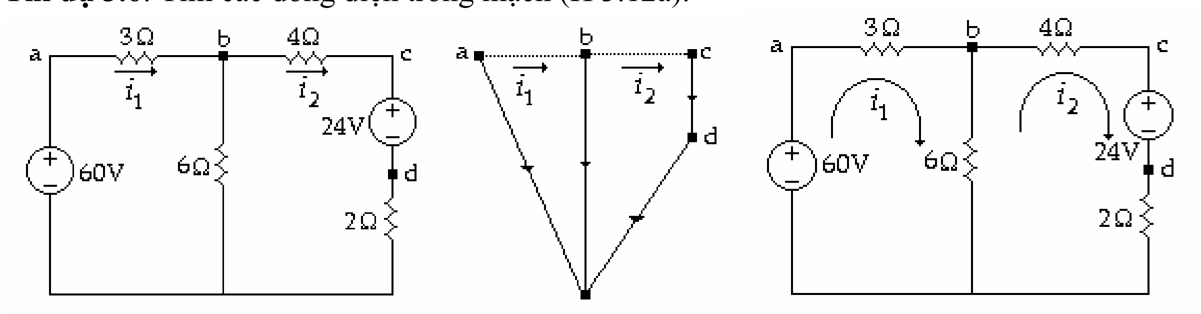
3.3.1 Mạch chỉ chứa điện trở và nguồn hiệu thế

▪ Nguồn hiệu thế độc lập :

Nếu mạch chỉ chứa nguồn hiệu thế độc lập, các hiệu thế chưa biết đều có thể tính theo L dòng điện độc lập.

Áp dụng KVL cho L vòng độc lập (hay L mắt lưới) ta được L phương trình gọi là hệ phương trình vòng. Giải hệ phương trình ta được các dòng điện vòng rồi suy ra các hiệu thế nhánh từ hệ thức *v - i*.

Thí dụ 3.6: Tìm các dòng điện trong mạch (H 3.12a).



(a) (b) (c)

(H 3.12)

Mạch có N = 5 và B = 6

Vậy L = B - N + 1 = 2

Chọn cây gồm các đường liền nét (H 3.12b). Các vòng có được bằng cách thêm các nhánh nối 1 và 2 vào cây.

Dòng điện i_1 và i_2 trong các nhánh nối tạo thành tập hợp các dòng điện độc lập. Các dòng điện khác trong mạch có thể tính theo i_1 và i_2.

Mặt khác, thay vì chỉ rõ dòng điện trong mỗi nhánh, ta có thể dùng khái niệm dòng điện vòng. Đó là dòng điện trong nhánh nối ta tưởng tượng như chạy trong cả vòng độc lập tạo bởi các cành của cây và nhánh nối đó (H 3.12c).

Viết KVL cho mỗi vòng:

$$\begin{cases} 6(i_1 - i_2) + 3i_1 - 60 = 0 \\ 2i_2 + 6(i_2 - i_1) + 4i_2 + 24 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Thu gọn:

$$\begin{cases} (6+3)i_1 - 6i_2 = 60 \\ -6i_1 + (2+4+6)i_2 = -24 \end{cases} \qquad (2)$$

Giải hệ thống ta được :

i_1 = 8A và i_2 = 2A

Dòng qua điện trở 6Ω: $\boldsymbol{i_1 - i_2 = 6}$ **(A)**

- **Thiết lập phương trình vòng cho trường hợp tổng quát**

Coi mạch chỉ chứa điện trở và nguồn hiệu thế độc lập , có L vòng.

Gọi i_j, i_k ...là dòng điện vòng của vòng j, vòng k ...Tổng hiệu thế ngang qua các điện trở chung của vòng j và k luôn có dạng:

$$R_{jk}\,(\,i_j \pm i_k) \qquad (3.8)$$

Dấu (+) khi i_j và i_k cùng chiều và ngược lại.

R_{jk} là tổng điện trở chung của vòng j và vòng k. Ta luôn luôn có:

$$R_{jk} = R_{kj}$$

v_j là tổng đại số các nguồn trong vòng j, các nguồn này có giá trị (+) khi tạo ra dòng điện cùng chiều i_j (chiều của vòng).

Áp dụng KVL cho vòng j:

$$\sum_k R_{jk}\left(i_j \pm i_k\right) = v_j \qquad (3.10)$$

Hay $$i_j\sum_k R_{jk} \pm \sum_k R_{jk} i_k = v_j \qquad (3.11)$$

$\sum_k R_{jk}$ chính là tổng điện trở chung của vòng j với tất cả các vòng khác tức là tổng điện trở có trong vòng j.

Đặt $\sum_k R_{jk}$ = R_{jj} và với qui ước R_{jk} có trị dương khi i_j và i_k cùng chiều và âm khi ngược lại, ta viết lại (3.11) như sau:

$$R_{jj} i_j + \sum_k R_{jk} i_k = v_j \qquad (3.12)$$

Đối với mạch có L vòng độc lập :

Vòng 1 : $R_{11}i_1 + R_{12}i_2 + \ldots.\, R_{1L}i_L = v_1$

Vòng 2 : $R_{21}i_1 + R_{22}i_2 + \ldots.\, R_{2L}i_L = v_2$

: : : : :

: : : : :

Vòng L: $R_{L1}i_1 + R_{L2}i_2 + \ldots.\, R_{LL}i_L = v_L$

Dưới dạng ma trận

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \ldots\ldots\ldots\ldots R_{1.L} \\ R_{21} & R_{22} & \ldots\ldots\ldots\ldots R_{2.L} \\ : & : & : \\ : & : & : \\ : & : & : \\ R_{L.1} & R_{L.2} & \ldots\ldots\ldots\ldots R_{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ : \\ : \\ : \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ : \\ : \\ : \\ v_L \end{bmatrix}$$

Hệ phương trình vòng viết dưới dạng vắn tắt:

[R] .[I] = [V] (3.13)

[R]: Gọi là ma trận điện trở vòng độc lập. Các phần tử trên đường chéo chính luôn luôn dương, các phần tử khác có trị dương khi 2 dòng điện vòng chạy trên nó cùng chiều, có trị âm khi 2 dòng điện vòng ngược chiều. Các phần tử này đối xứng qua đường chéo chính.

[I] : Ma trận dòng điện vòng

[V]: Ma trận hiệu thế vòng

Trở lại **thí dụ 3.6** ta có thể viết hệ phương trình vòng một cách trực quan với các số liệu sau:

$R_{11} = 3 + 6 = 9\ \Omega$,

$R_{22} = 2 + 4 + 6 = 12\ \Omega$,

$R_{21} = R_{12} = -6\ \Omega$,

$v_1 = 60$ V

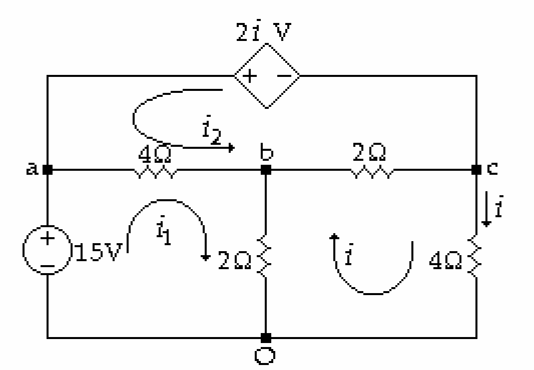
và

$\boldsymbol{v_2 = -24}$ **(V)**

▪ **Nguồn hiệu thế phụ thuộc**

Nếu mạch có chứa nguồn hiệu thế phụ thuộc, trị số của nguồn này phải được tính theo các dòng điện vòng. Trong trường hợp này ma trận điện thế mất tính đối xứng.

Thí dụ 3.7 Tính i trong mạch (H 3.13)



(H 3.13)

Viết phương trình vòng cho các vòng trong mạch

$6i_1 - 2i + 4i_2 = 15$ (1)

$4i_1 + 2i + 6i_2 = 2i$ (2)

$-2i_1 + 8i + 2i_2 = 0$ (3)

(2) cho $i_1 = -\frac{3}{2} i_2$ (4)

(3) cho $i = \frac{i_1 - i_2}{4}$ (5)

Thay (5) vào (1)

$11i_1 + 9i_2 = 30$ (6)

Thay (4) vào (6) ta được

$i_2 = -4$ A

$i_1 = 6$ A

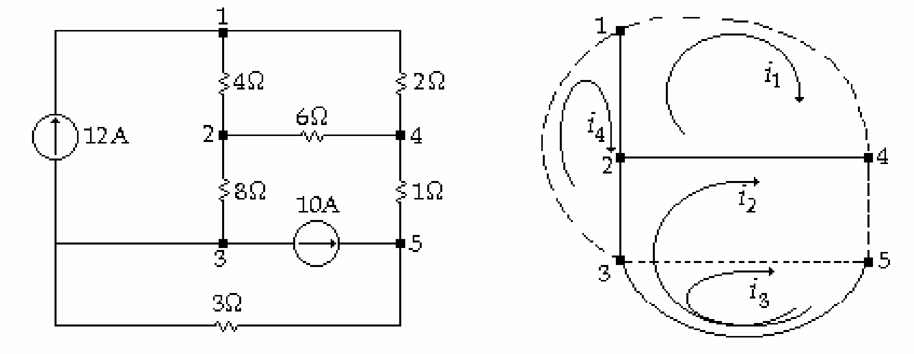
Và $\boldsymbol{i = 2,5}$ **(A)**

3.3.2. Mạch chứa nguồn dòng điện

▪ **Nguồn dòng điện độc lập**

Nếu một nhánh của mạch là một nguồn dòng điện độc lập, hiệu thế của nhánh này khó có thể tính theo dòng điện vòng như trước. Tuy nhiên nếu một dòng điện vòng duy nhất được vẽ qua nguồn dòng điện thì nó có trị số của nguồn này và chỉ còn (L-1) ẩn số thay vì L (bằng cách **không** chọn nhánh có chứa nguồn dòng làm cành của cây).

Thí dụ 3.8: Tính dòng điện qua điện trở 2Ω trong mạch (H3.14a)



(a) (H 3.14) (b)

Mạch có B = 8, N = 5, cây có 4 nhánh và 4 vòng độc lập .

Chọn cây như (H 3.14b) (nét liền), cành của cây không là nhánh có chứa nguồn dòng độc lập. Ta có:

$i_3 = 10$ A và $i_4 = 12$ A

Viết phương trình vòng cho hai vòng còn lại.

Vòng 1: $(4 + 6 + 2)i_1 - 6i_2 - 4i_4 = 0$ (1)

Vòng 2: $-6i_1 + 18i_2 + 3i_3 - 8i_4 = 0$ (2)

Thay $i_3 = 10$ A và $i_4 = 12$ A vào (1) và (2)

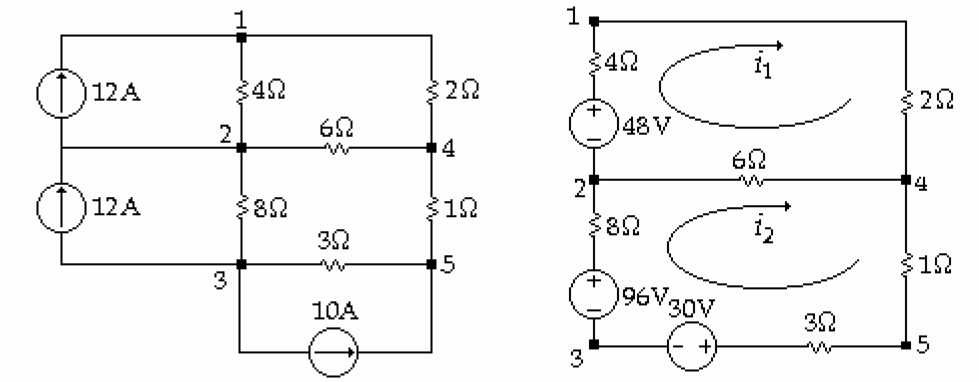
$$12i_1 - 6i_2 = 48$$

$$-6i_1 + 18i_2 = 66$$

Suy ra $\boldsymbol{i_1 = 7}$ **(A)**

Thí dụ trên cho thấy ta vẫn có thể viết được hệ phương trình vòng cho mạch chứa nguồn dòng điện độc lập. Tuy nhiên ta cũng có thể biến đổi và chuyển vị nguồn (nếu cần) để có mạch chứa nguồn hiệu thế và như vậy việc viết phương trình một cách trực quan dễ dàng hơn.

Mạch ở (H 3.14a) có thể chuyển dời và biến đổi nguồn để được mạch (H 3.15) dưới đây.



(a) (H 3.15) (b)

Với mạch (H 3.15b), ta viết hệ phương trình vòng.

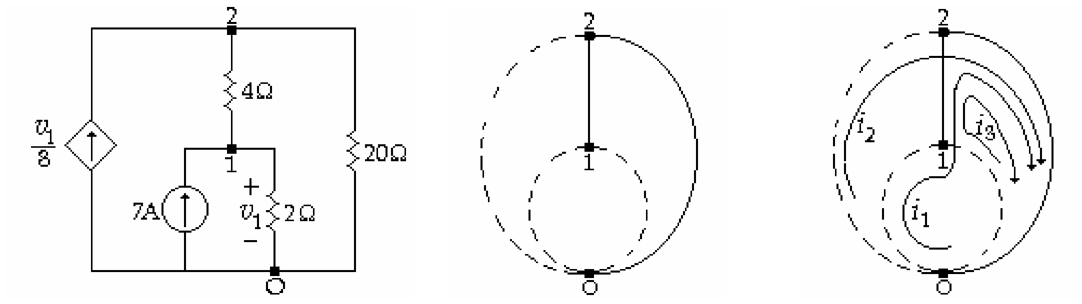
Vòng 1: $12i_1 - 6i_2 = 48$

Vòng 2: $-6i_1 + 18i_2 = 96 - 30$

Ta được lại kết quả trước.

▪ **Nguồn dòng điện phụ thuộc**

Tìm v_1 trong mạch (H 3.16)



(a) (b) (c)

(H 3.16)

Mạch có B = 5, N = 3 cây có hai cành và 3 vòng độc lập .

Chọn cây là đường liền nét của (H 3.16b). Các nguồn dòng điện ở nhánh nối

Viết phương trình cho vòng 3

$26i_3 + 20i_2 + 24i_1 = 0$ (1)

Với $i_1 = 7A$ và $i_2 = \frac{v_1}{8} = -\frac{1}{4}i_3$ (2)

Thay (2) vào (1)

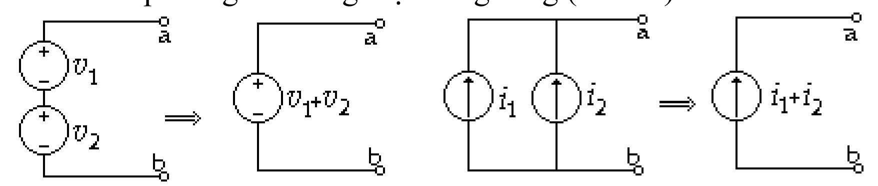
$26i_3 - 5i_3 + 168 = 0 \Rightarrow$ $\boldsymbol{i_3 = -8}$ **(A)** và $\boldsymbol{v_1 = 16}$ **(V)**

3.4 Biến đổi và chuyển vị nguồn

Các phương pháp biến đổi và chuyển vị nguồn nhằm mục đích sửa soạn mạch cho việc phân giải được dễ dàng. Mạch sau khi biến đổi hoặc phải đơn giản hơn hoặc thuận tiện hơn trong việc áp dụng các phương trình mạch điện .

3.4.1. Biến đổi nguồn

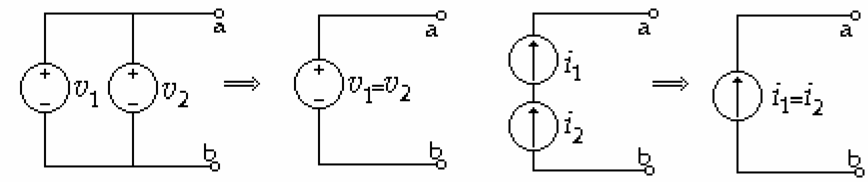
▪ Nguồn hiệu thế nối tiếp và nguồn dòng điện song song (H 3.17).



(H 3.17)

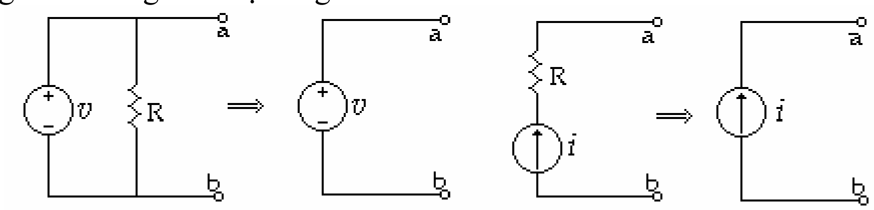
▪ Nguồn hiệu thế song song và nguồn dòng điện nối tiếp.

Ta phải có: $v_1 = v_2$ và $i_1 = i_2$.



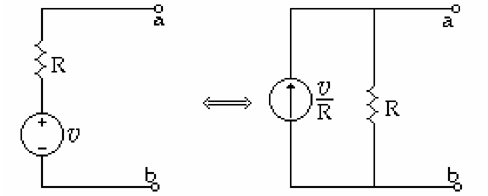
(H 3.18)

▪ Nguồn hiệu thế song song với điện trở và nguồn dòng điện nối tiếp điện trở : Có thể bỏ điện trở mà không ảnh hưởng đến mạch ngoài.



(H 3.19)

▪ Nguồn hiệu thế mắc nối tiếp với điện trở hay nguồn dòng mắc song song với điện trở. Ta có thể dùng biến đổi Thevenin ↔ Norton để biến đổi nguồn hiệu thế thành nguồn dòng điện hay ngược lại cho phù hợp với hệ phương trình sắp phải viết.



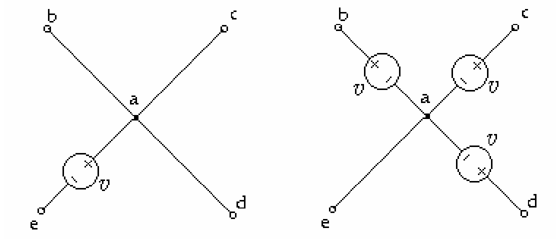
(H 3.20)

3.4.2. Chuyển vị nguồn :

Khi gặp 1 nguồn hiệu thế không có điện trở nối tiếp kèm theo hoặc 1 nguồn dòng điện không có điện trở song song kèm theo, ta có thể chuyển vị nguồn trước khi biến đổi chúng. Trong khi chuyển vị, các định luật KCL và KVL không được vi phạm.

▪ Chuyển vị nguồn hiệu thế :

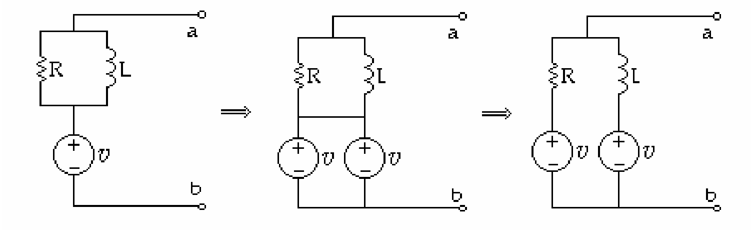
(H 3.21) cho ta thấy một cách chuyển vị nguồn hiệu thế . Ta có thể chuyển một nguồn hiệu thế " xuyên qua một nút " tới các nhánh khác nối với nút đó và nối tắt nhánh có chứa nguồn ban đầu mà không làm thay đổi phân bố dòng điện của mạch, mặc dù có sự thay đổi về phân bố điện thế nhưng định luật KVL viết cho các vòng của mạch không thay đổi. Hai mạch hình 3.21a và 3.21b tương đương với nhau.



(a) (b)

(H 3.21)

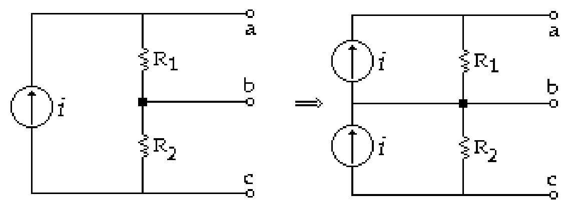
Thí dụ 3.9: Ba mạch điện của hình 3.22 tương đương nhau:



(H 3.22)

▪ Chuyển vị nguồn dòng điện:

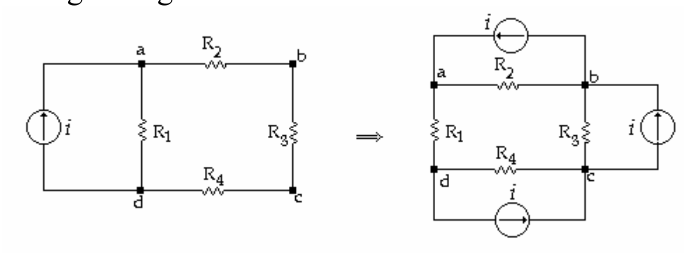
Nguồn dòng điện *i* mắc song song với R_1 và R_2 nối tiếp trong mạch hình 3.23a được chuyển vị thành hai nguồn song song với R_1 và R_2 hình 3.23b.



(H 3.23)

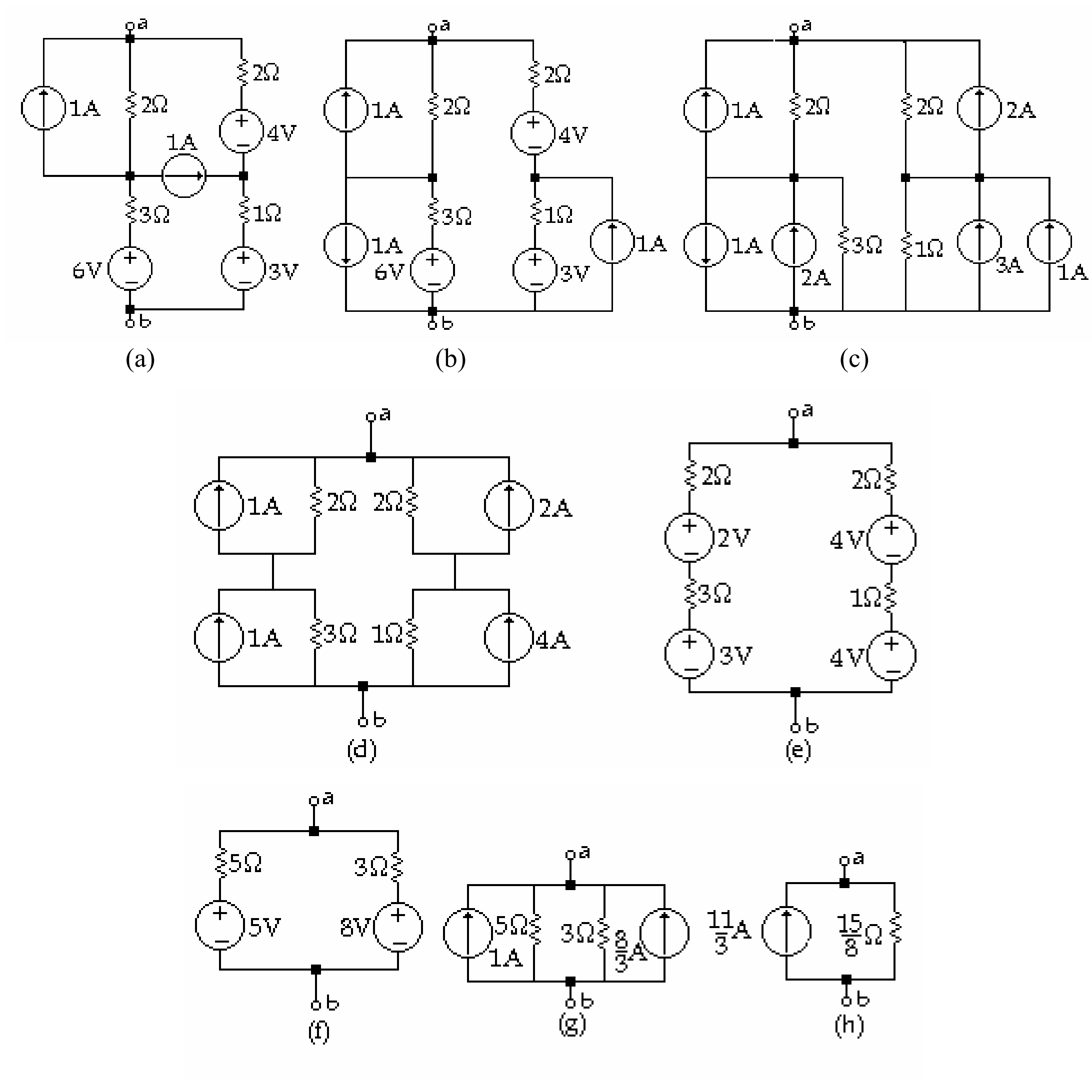
Định luật KCL ở các nút a, b, c của các mạch (H 3.23) cho kết quả giống nhau.

Hoặc một hình thức chuyển vị khác thực hiện như ở (H 3.24a) và (H 3.24b). Định luật KCL ở các nút của hai mạch cũng giống nhau, mặc dù sự phân bố dòng điện có thay đổi nhưng hai mạch vẫn tương đương .



(a) (H 3.24) (b)

Thí dụ 3.10: Tìm hiệu thế giữa a b của các mạch hình 3.25a



(H 3.25)

Suy ra $v_{ab} = \frac{15}{8}\frac{11}{3} = \frac{55}{8}$ V

$v_{ab} = \mathbf{\frac{55}{8}}$ **V**

Tóm lại, khi giải mạch bằng các phương trình vòng hoặc nút chúng ta nên sửa soạn các mạch như sau:

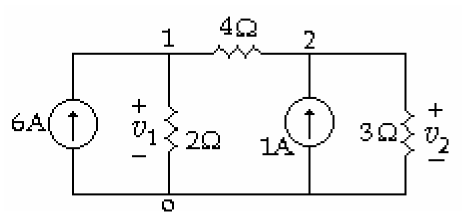
- Nếu giải bằng phương trình nút, biến đổi để chỉ có các nguồn dòng điện trong mạch.
- Nếu giải bằng phương trình vòng, biến đổi để chỉ có các nguồn hiệu thế trong mạch.

BÀI TẬP

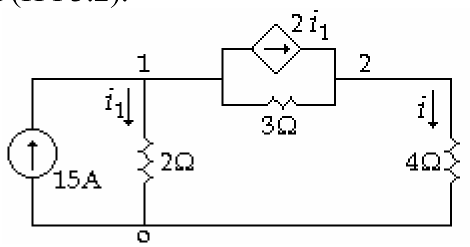
--o0o--

1. Dùng phương trình nút, tìm v_1 và v_2 của mạch (H P3.1)

2. Dùng phương trình nút , tìm *i* trong mạch (H P3.2).



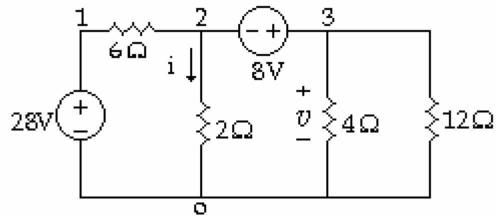
(H P3.1)



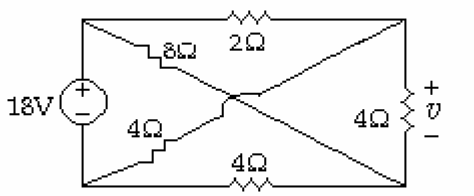
(H P3.2)

3. Dùng phương trình nút tìm *v* và *i* trong mạch (H P3.3).

4. Dùng phương trình nút, tìm *v* trong mạch (H P3.4)



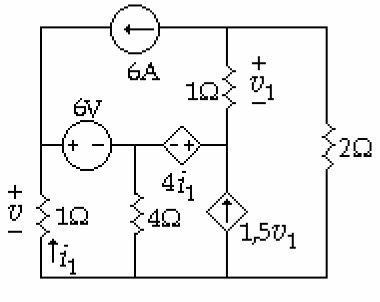
(H P3.3)



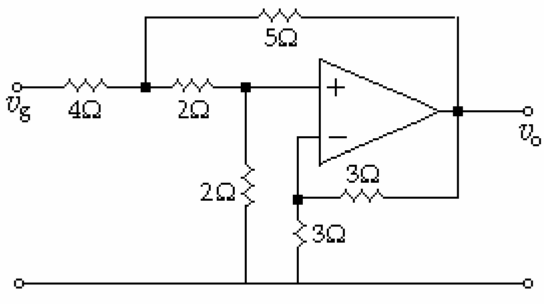
(H P3.4)

5. Dùng phương trình nút, tìm *v* và v_1 trong mạch (H P3.5)

6. Cho v_g = 8cos3t (V), tìm v_o trong mạch (H P3.6)

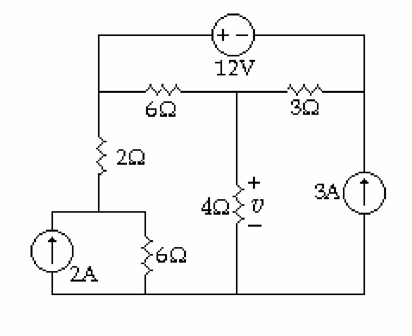


(H P3.5)



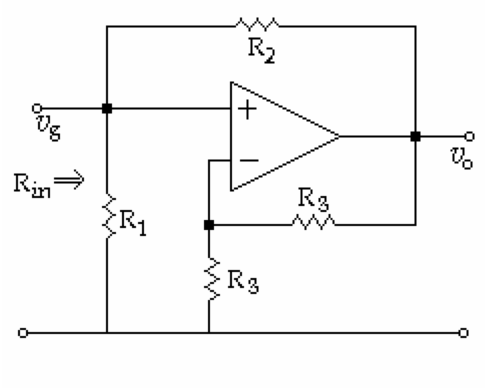
(H P3.6)

7. Tìm *v* trong mạch (H P3.7), dùng phương trình vòng hay nút sao cho có ít phương trình nhất.



(H P3.7)

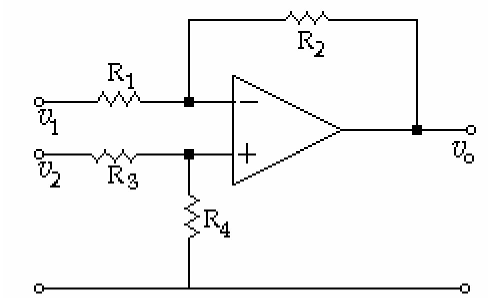
8. Tìm R_{in} theo các R, R_2, R_3 mạch (H P3.8).
Cho $R_1 = R_3 = 2K\Omega$. Tìm R_2 sao cho $R_{in} = 6K\Omega$ và $R_{in} = 1K\Omega$

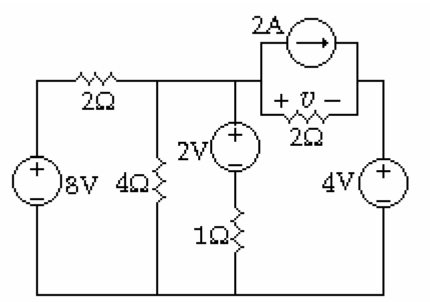


(H P3.8)

9. Cho mạch khuếch đại vi sai (H P3.9)
- Tìm v_o theo v_1, v_2, R_1, R_2, R_3, R_4.
- Tìm liên hệ giữa các điện trở sao cho: $v_o = \frac{R_2}{R_1}(v_2 - v_1)$

10. Tìm hiệu thế *v* ngang qua nguồn dòng điện trong mạch (H P3.10) bằng cách dùng phương trình vòng rồi phương trình nút.



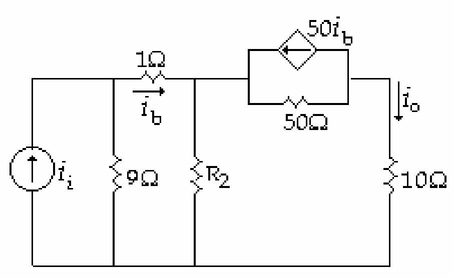


(H P3.9) (H P3.10)

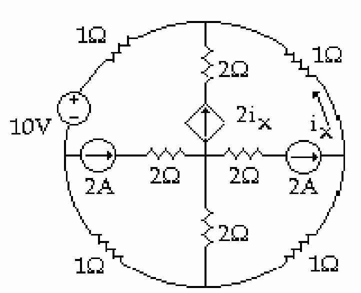
11. Tính độ lợi dòng điện $\frac{i_0}{i_i}$ của mạch (H P.11) trong 2 trường hợp.

a. $R_2 = 0\Omega$
b. $R_2 = 1\Omega$

12. Tìm i_x trong mạch (H P.12)


1Ω
i_b
$50i_b$
50Ω
i_o
i_i
9Ω
R_2
10Ω

(H P.11)


1Ω
2Ω
1Ω
10V
$2i_x$
i_x
2A
2Ω
2Ω
2A
2Ω
1Ω
1Ω

(H P.12)

✳ CHƯƠNG 4

MẠCH ĐIỆN ĐƠN GIẢN: RL VÀ RC

✳ MẠCH KHÔNG CHỨA NGUỒN NGOÀI - PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN THUẦN NHẤT
◇ Mạch RC không chứa nguồn ngoài
◇ Mạch RL không chứa nguồn ngoài
◇ Thời hằng
✳ MẠCH CHỨA NGUỒN NGOÀI - PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CÓ VẾ 2.
✳ TRƯỜNG HỢP TỔNG QUÁT

◇ Phương trình mạch điện đơn giản trong trường hợp tổng quát
◇ Một phương pháp ngắn gọn
✳ VÀI TRƯỜNG HỢP ĐẶC BIỆT
◇ Đáp ứng đối với hàm nấc
◇ Dùng định lý chồng chất

Chương này xét đến một lớp mạch chỉ chứa một phần tử tích trữ năng lượng (L hoặc C) với một hay nhiều điện trở.

Áp dụng các định luật Kirchhoff cho các loại mạch này ta được các phương trình vi phân bậc 1, do đó ta thường gọi các mạch này là mạch điện bậc 1.

Do trong mạch có các phần tử tích trữ năng lượng nên đáp ứng của mạch, nói chung, có ảnh hưởng bởi điều kiện ban đầu của mạch. Vì vậy, khi giải mạch chúng ta phải quan tâm tới các thời điểm mà mạch thay đổi trạng thái (thí dụ do tác động của một khóa K), gọi là thời điểm qui chiếu t_0 (trong nhiều trường hợp, để đơn giản ta chọn t_0=0). Để phân biệt thời điểm ngay trước và sau thời điểm qui chiếu ta dùng ký hiệu t_{0-}(trước) và t_{0+} (sau).

4.1 MẠCH KHÔNG CHỨA NGUỒN NGOÀI - PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN THUẦN NHẤT

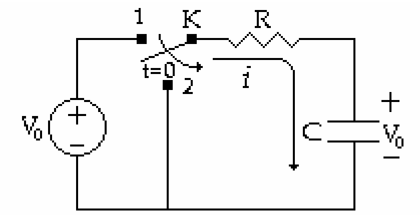
4.1.1 Mạch RC không chứa nguồn ngoài

Xét mạch (H 4.1a).

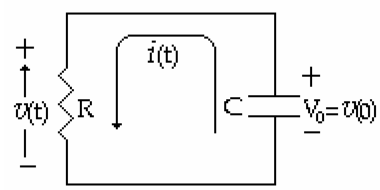
- Khóa K ở vị trí 1 để nguồn V_0 nạp cho tụ. Lúc tụ đã nạp đầy (hiệu thế 2 đầu tụ là V_0) dòng nạp triệt tiêu i(0-)=0 (Giai đoạn này ứng với thời gian t=- ∞ đến t=0-).

- Bật K sang vị trí 2, ta xem thời điểm này là t=0. Khi t>0, trong mạch phát sinh dòng i(t) do tụ C phóng điện qua R (H 4.1b).

Xác định dòng i(t) này (tương ứng với thời gian t≥0).



(a)



(b)

(H 4.1)

Gọi $v(t)$ là hiệu thế 2 đầu tụ lúc t>0

Áp dụng KCL cho mạch (H 4.1b)

$$C\frac{dv}{dt}+\frac{v}{R}=0$$

Hay

$$\frac{dv}{dt}+\frac{1}{RC}v=0$$

Đây là phương trình vi phân bậc nhất không có vế 2. Lời giải của phương trình là:

$$v(t)=Ae^{\frac{-t}{RC}}$$

A là hằng số tích phân, xác định bởi điều kiện đầu của mạch.

Khi t=0, $v(0)=V_0=Ae^0$ $\Rightarrow$ $A=V_0$

Tóm lại: $v(t)=V_0e^{\frac{-t}{RC}}$ khi $t\geq 0$

Dòng $i(t)$ xác định bởi

$$i(t)=\frac{v(t)}{R}=\frac{V_0}{R}e^{\frac{-t}{RC}} \text{ khi } t\geq 0$$

$$i(0+)=\frac{V_0}{R}$$

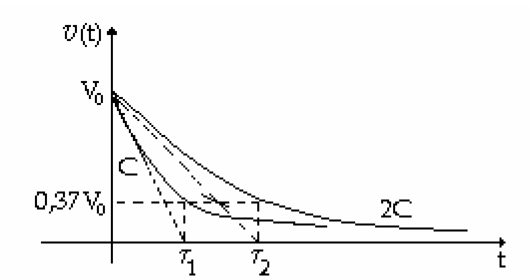
Từ các kết quả trên, ta có thể rút ra kết luận:

- Dòng qua tụ C đã thay đổi đột ngột từ trị 0 ở t=0- đến V_0/R ở t=0+. Trong lúc
- Hiệu thế hai đầu tụ không đổi trong khoảng thời gian chuyển tiếp từ t=0- đến t=0+: $v_C(0+)=v_C(0-)=V_0$.

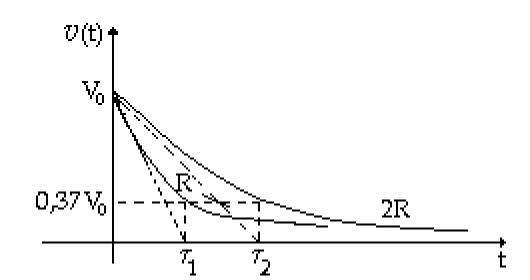
Đây là một tính chất đặc biệt của tụ điện và được phát biểu như sau:

Hiệu thế 2 đầu một tụ điện không thay đổi tức thời

Dạng sóng của $v(t)$ (tương tự cho $i(t)$) được vẽ ở (H 4.2)



(a)



(b)

(H 4.2)

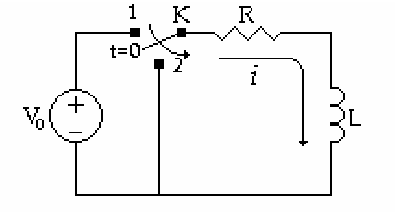
- (H 4.2a) tương ứng với V_0 và R không đổi, tụ điện có trị C và 2C (độ dốc gấp đôi)
- (H 4.2b) tương ứng với V_0 và C không đổi, điện trở có trị R và 2R

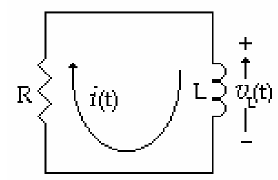
Chú ý: Nếu thời điểm đầu (lúc chuyển khóa K) là t_0 thay vì 0, kết quả $v(t)$ viết lại:

$$v(t)=V_0e^{\frac{-(t-t_0)}{RC}} \text{ khi } t\geq t_0$$

4.1.2 Mạch RL không chứa nguồn ngoài

Xét mạch (H 4.3a).





(a) (H 4.3) (b)

- Khóa K ở vị trí 1, dòng qua mạch đã tích trữ trong cuộn dây một năng lượng từ trường. Khi mạch đạt trạng thái ổn định, hiệu thế 2 đầu cuộn dây $v(0\text{-})=0$ và dòng điện qua cuộn dây là $i(0\text{-}) = I_0 = \dfrac{V_0}{R}$

- Bật K sang vị trí 2, chính năng lượng từ trường đã tích được trong cuộn dây duy trì dòng chạy qua mạch. Ta xem thời điểm này là t=0. Khi t>0, dòng i(t) tiếp tục chạy trong mạch (H 4.3b).

Xác định dòng i(t) này.

Áp dụng KVL cho mạch (H 4.3b)

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0$$

Hay $$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0$$

Lời giải của phương trình là:

$$i(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

A là hằng số tích phân, xác định bởi điều kiện đầu của mạch

Khi t=0, $i(0) = I_0 = \dfrac{V_0}{R} = Ae^0 \quad \Rightarrow \quad A = I_0$

Tóm lại: $$i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad \text{khi } t \geq 0$$

$$v_L(t) = -Ri(t) = -RI_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad \text{khi } t \geq 0$$

Từ các kết quả trên, ta có thể rút ra kết luận:

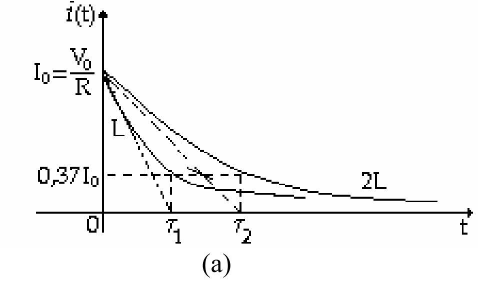
- Hiệu thế hai đầu cuộn dây đã thay đột ngột đổi từ $v_L(0\text{-})=0$ đến $v_L(0+)=-RI_0$.
- Dòng qua cuộn dây không đổi trong khoảng thời gian chuyển tiếp từ t=0- đến t=0+:

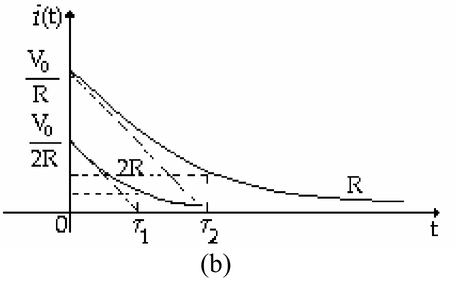
  $i_L(0+) = i_L(0\text{-}) = I_0 = V_0/R$.

Đây là một tính chất đặc biệt của cuộn dây và được phát biểu như sau:

Dòng điện qua một cuộn dây không thay đổi tức thời

Dạng sóng của v(t) (tương tự cho i(t)) được vẽ ở (H 4.4)





(a) (H 4.4) (b)

- (H 4.4a) tương ứng với V_0 và R không đổi, cuộn dây có trị L và 2L
- (H 4.2b) tương ứng với V_0 và L không đổi, điện trở có trị R và 2R

4.1.3 Thời hằng

Trong các mạch có chứa các phần tử tích trữ năng lượng và các điện trở, khi mạch hoạt động năng lượng của phần tử có thể giảm dần theo thời gian do sự tiêu hao qua điện trở, dưới dạng nhiệt. Để đo mức độ giảm nhanh hay chậm của các đại lượng này, người ta dùng khái niệm thời hằng.

Trong hai thí dụ trên, đáp ứng có chung một dạng:

$$y(t) = Y_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (4.1)$$

Đại lượng τ trong biểu thức chính là thời hằng.

Với mạch RL: $\tau = L/R$ (4.2)

Với mạch RC: $\tau = RC$ (4.3)

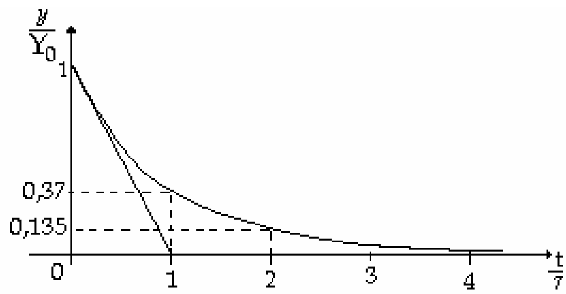
τ tính bằng giây (s).

Khi $t = \tau \Rightarrow y(t) = Y_0 e^{-\frac{\tau}{\tau}} = Y_0 e^{-1} = 0{,}37 Y_0$

Nghĩa là, sau thời gian τ, do phóng điện, đáp ứng giảm còn 37% so với trị ban đầu

Bảng trị số và giản đồ (H 4.5) dưới đây cho thấy sự thay đổi của $i(t)/I_0$ theo tỉ số t/τ

t/τ	0	1	2	3	4	5
$y(t)/Y_0$	1	0,37	0,135	0,05	0,018	0,0067



(H 4.5)

Ta thấy đáp ứng giảm còn 2% trị ban đầu khi $t = 4\tau$ và trở nên không đáng kể khi $t = 5\tau$. Do đó người ta xem sau 4 hoặc 5τ thì đáp ứng triệt tiêu.

Lưu ý là tiếp tuyến của đường biểu diễn tại t=0 cắt trục hoành tại điểm 1, tức $t = \tau$, điều này có nghĩa là nếu dòng điện giảm theo tỉ lệ như ban đầu thì triệt tiêu sau thời gian τ chứ không phải 4τ hoặc 5τ.

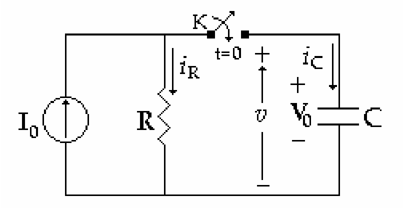
Thời hằng của một mạch càng nhỏ thì đáp ứng giảm càng nhanh (thí dụ tụ điện phóng điện qua điện trở nhỏ nhanh hơn phóng điện qua điện trở lớn). Người ta dùng tính chất này để so sánh đáp ứng của các mạch khác nhau.

4.2 MẠCH CHỨA NGUỒN NGOÀI-PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CÓ VẾ 2

4.2.1 Mạch chứa nguồn DC

Chúng ta xét đến mạch RL hoặc RC được kích thích bởi một nguồn DC từ bên ngoài. Các nguồn này được gọi chung là **hàm ép** (forcing function).

Xét mạch (H 4.6). Khóa K đóng tại thời điểm t=0 và tụ đã tích điện ban đầu với trị V_0. Xác định các giá trị v, i_C và i_R sau khi đóng khóa K, tức t>0.



(H 4.6)

Khi t>0, viết KCL cho mạch:

$$C\frac{dv}{dt}+\frac{v}{R}=I_0$$

Hay

$$\frac{dv}{dt}+\frac{1}{RC}v=\frac{I_0}{C}$$

Giải phương trình, ta được:

$$v(t)=Ae^{\frac{-t}{RC}}+RI_0$$

Xác định A nhờ điều kiện đầu.

Ở t=0+: $v(0+)=v(0-)=V_0 \Rightarrow V_0=A+RI_0$

Hay $A=V_0-RI_0$

$$v(t)=(V_0-RI_0)e^{\frac{-t}{RC}}+RI_0=V_0e^{\frac{-t}{RC}}+RI_0(1-e^{\frac{-t}{RC}})$$

Hằng số A bây giờ tùy thuộc vào điều kiện đầu (V_0) và cả nguồn kích thích (I_0)

Đáp ứng gồm 2 phần:

⌖ Phần chứa hàm mũ có dạng giống như đáp ứng của mạch RC không chứa nguồn ngoài, phần này hoàn toàn được xác định nhờ thời hằng của mạch và được gọi là **đáp ứng tự nhiên:**

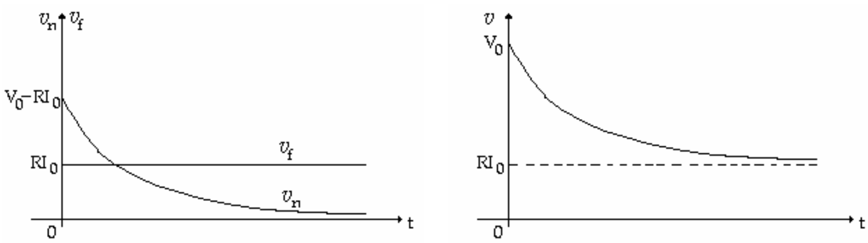
$$v_n=(V_0-RI_0)e^{\frac{-t}{RC}}$$

Để ý là $v_n \to 0$ khi $t \to \infty$

⌖ Phần thứ hai là một hằng số, tùy thuộc nguồn kích thích, được gọi là **đáp ứng ép** $v_f=RI_0$.

Trong trường hợp nguồn kích thích DC, v_f là một hằng số.

(H 4.7) là giản đồ của các đáp ứng v, v_n và v_f



(H 4.7)

Dòng i_C và i_R xác định bởi:

$$i_C(t)=C\frac{dv}{dt}=-\frac{V_0-RI_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i_R(t)=I_0-i_C=I_0+\frac{V_0-RI_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}=\frac{v}{R}$$

Lưu ý là khi chuyển đổi khóa K, hiệu thế 2 đầu điện trở đã thay đổi đột ngột từ RI_0 ở t=0- đến V_0 ở t=0+ còn hiệu thế 2 đầu tụ thì không đổi.

Về phương diện vật lý, hai thành phần của nghiệm của phương trình được gọi là **đáp ứng giao thời** (transient response) và **đáp ứng thường trực** (steady state response).

Đáp ứng giao thời $\rightarrow 0$ khi $t \rightarrow \infty$ và đáp ứng thường trực chính là phần còn lại sau khi đáp ứng giao thời triệt tiêu.

Trong trường hợp nguồn kích thích DC, đáp ứng thường trực là hằng số và chính là trị của đáp ứng khi mạch đạt **trạng thái ổn định** (trạng thái thường trực)

4.2.2 Điều kiện đầu và điều kiện cuối (Initial and final condition)

4.2.2.1 Điều kiện đầu

Trong khi tìm lời giải cho một mạch điện, ta thấy cần phải tìm một hằng số tích phân bằng cách dựa vào trạng thái ban đầu của mạch mà trạng thái này phụ thuộc vào các đại lượng ban đầu của các phần tử tích trữ năng lượng.

Dựa vào tính chất:

Hiệu thế ngang qua tụ điện và dòng điện chạy qua cuộn dây không thay đổi tức thời:

$v_C(0+)=v_C(0-)$ và $i_L(0+)=i_L(0-)$

- Nếu mạch không tích trữ năng lượng ban đầu thì:

$v_C(0+)=v_C(0-) = 0$, tụ điện tương đương mạch nối tắt.

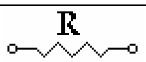
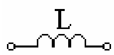
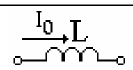
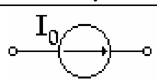
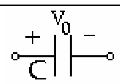
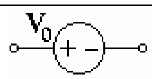
$i_L(0+)=i_L(0-) = 0$, cuộn dây tương đương mạch hở.

- Nếu mạch tích trữ năng lượng ban đầu:

* Hiệu thế ngang qua tụ tại t=0- là $V_0=q_0/C$ thì ở t=0+ trị đó cũng là V_0 , ta thay bằng một nguồn hiệu thế.

* Dòng điện chạy qua cuộn dây tại t=0- là I_0 thì ở t=0+ trị đó cũng là I_0 , ta thay bằng một nguồn dòng điện.

Các kết quả trên được tóm tắt trong bảng 4.1

Phần tử với điều kiện đầu	Mạch tương đương	Giá trị đầu
		
	Mạch hở	$I_L(0+)=I_L(0-)=0$
	Mạch nối tắt	$V_C(0+)=V_C(0-)=0$
		$I_L(0+)=I_L(0-)=I_0$
		$V_C(0+)=V_C(0-)=V_0$

Bảng 4.1

4.2.2.2 Điều kiện cuối

Đáp ứng của mạch đối với nguồn DC gồm đáp ứng tự nhiên $\rightarrow 0$ khi $t\rightarrow\infty$ và đáp ứng ép là các dòng điện hoặc hiệu thế trị không đổi.

Mặt khác vì đạo hàm của một hằng số thì bằng 0 nên:

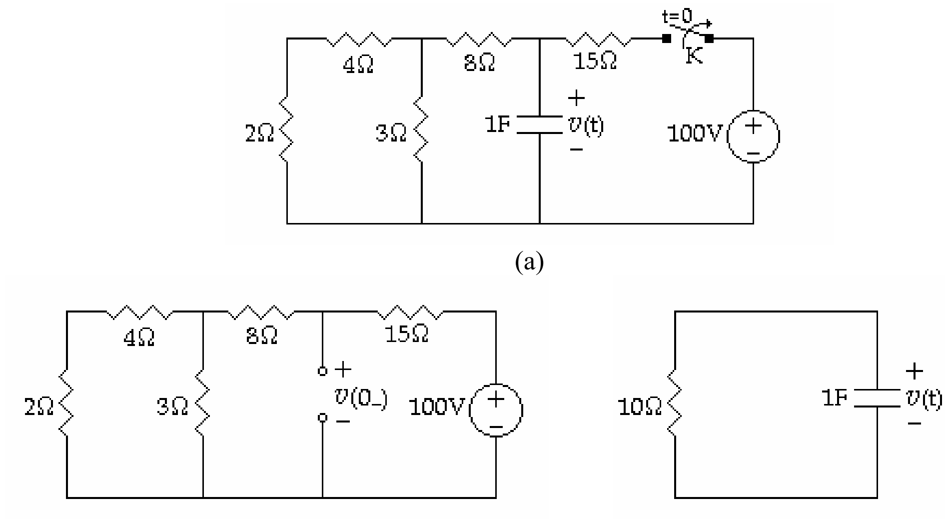
$v_C = C^{te} \Rightarrow i_C = C\dfrac{dv_C}{dt} = 0$ (mạch hở) và $i_L = C^{te} \Rightarrow v_L = L\dfrac{di_L}{dt} = 0$ (mạch nối tắt)

Do đó, ở **trạng thái thường trực DC**, tụ điện được thay bằng một mạch hở và cuộn dây được thay bằng một mạch nối tắt.

<u>Ghi chú</u>: Đối với các mạch có sự thay đổi trạng thái do tác động của một khóa K, trạng thái cuối của mạch này có thể là trạng thái đầu của mạch kia.

Thí dụ 4.1

Xác định hiệu thế v(t) trong mạch (H 4.8a). Biết rằng mạch đạt trạng thái thường trực trước khi mở khóa K.



(a)

(b) (c)

(H 4.8)

(H 4.8b) là mạch tương của (H 4.8a) ở t=0-, tức mạch (H 4.8a) đạt trạng thái thường trực, tụ điện tương đương với mạch hở và điện trở tương đương của phần mạch nhìn từ tụ về bên trái:

$$R_{tđ} = 8 + \frac{3(2+4)}{3+(2+4)} = 10\Omega$$

và hiệu thế v(0-) xác định nhờ cầu phân thế 10Ω và 15Ω

$$v(0-) = 100\frac{10}{10+15} = 40V$$

Khi t>0, khóa K mở, ta có mạch tương đương ở (H 4.8c), đây chính là mạch RC không chứa nguồn ngoài.

Ap dụng kết quả trong phần 4.1, được:

$$v(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

với τ =RC=10x1=10 s và V_0= v(0+)= v(0-)=40 (V)

$$v(t) = 40e^{-\frac{t}{10}} \text{ (V)}$$

4.3 TRƯỜNG HỢP TỔNG QUÁT

4.3.1 Phương trình mạch điện đơn giản trong trường hợp tổng quát

Ta có thể thấy ngay phương trình mạch điện đơn giản trong trường hợp tổng quát có dạng:

$$\frac{dy}{dt} + Py = Q \qquad (4.4)$$

Trong đó y chính là biến số, hiệu thế v hoặc dòng điện i trong mạch, P là hằng số tùy thuộc các phần tử R, L, C và Q tùy thuộc nguồn kích thích, có thể là hằng số hay một hàm theo t.

Ta có thể tìm lời giải tổng quát cho phương trình (4.4) bằng phương pháp thừa số tích phân: nhân 2 vế phương trình với một thừa số sao cho vế thứ nhất là đạo hàm của một hàm và sau đó lấy tích phân 2 vế

Nhân 2 vế của (4.4) với e^{pt}

$$(\frac{dy}{dt}+Py)e^{pt}=Qe^{pt} \tag{4.5}$$

Vê 1 của phương trình chính là $\frac{d}{dt}(ye^{pt})$ và (4.5) trở thành:

$$\frac{d}{dt}(ye^{pt})=Qe^{pt} \tag{4.6}$$

Lấy tích phân 2 vế:

$$ye^{pt}=\int Qe^{pt}dt+A$$

Hay $$y=e^{-pt}\int Qe^{pt}dt+Ae^{-pt} \tag{4.7}$$

Biểu thức (4.5) đúng cho trường hợp Q là hằng số hay một hàm theo t.

Trường hợp Q là hằng số ta có kết quả:

$$y=Ae^{-pt}+\frac{Q}{P} \tag{4.8}$$

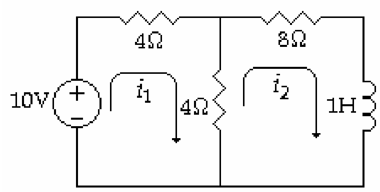
Đáp ứng cũng thể hiện rõ 2 thành phần :

- Đáp ứng tự nhiên $y_n=Ae^{-pt}$ và
- Đáp ứng ép $y_f=Q/P$.

So sánh với các kết quả phần 4.1 ta thấy thời hằng là 1/P

Thí dụ 4.2

Tìm i_2 của mạch (H 4.9) khi t>0, cho $i_2(0)$=1 A



(H 4.9)

Viết phương trình vòng cho mạch

Vòng 1: $8i_1-4i_2=10$ (1)

Vòng 2: $-4i_1+12i_2+\frac{di_2}{dt}=0$ (2)

Loại i_1 trong các phương trình ta được:

$$\frac{di_2}{dt}+10i_2=5 \tag{3}$$

Dùng kết quả (4.6)

$$i_2(t)=Ae^{-10t}+\frac{1}{2} \tag{4}$$

Xác định A:

Cho t=0 trong (4) và dùng điều kiện đầu $i_2(0)$=1 A

$$i_2(0)=A+\frac{1}{2}=1 \Rightarrow A=\frac{1}{2}$$

$$i_2(t)=\frac{1}{2}e^{-10t}+\frac{1}{2}$$

4.3.2 Một phương pháp ngắn gọn

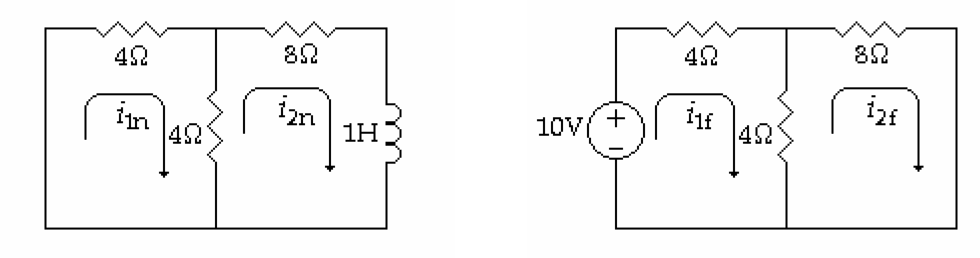
Dưới đây giới thiệu một phương pháp ngắn gọn để giải nhanh các **mạch bậc 1 không chứa nguồn phụ thuộc.**

Lấy lại thí dụ 4.2.

Lời giải i_2 có thể viết: $i_2 = i_{2n} + i_{2f}$

- Để xác định i_{2n}, ta xem mạch như không chứa nguồn (H 4.10a)

Điện trở tương đương nhìn từ cuộn dây gồm 2 điện trở 4Ω mắc song song (=2Ω), nối tiếp với 8Ω, nên R_{td} = 2Ω+8Ω = 10Ω



(a) (b)

(H 4.10)

Và $\quad \tau=\frac{L}{R_{tâ}}=\frac{1}{10}$ (s) $\Rightarrow$ $i_{2n}=Ae^{-10t}$

- Đáp ứng ép là hằng số, nó không tùy thuộc thời gian, vậy ta xét mạch ở trạng thái thường trực, cuộn dây tương đương mạch nối tắt (H 4.10b).

Điện trở tương đương của mạch: $R_{td}=4\Omega+\frac{4.8}{4+8}\Omega=\frac{20}{3}\Omega$

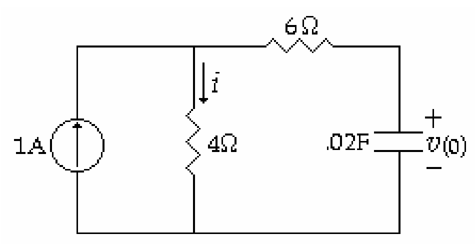
$$i_{1f}=\frac{10}{20/3}=\frac{3}{2}\ \text{(A)}$$

$$\Rightarrow \quad i_{2f}=\frac{1}{2}\ \text{(A)}$$

Vậy $\quad i_2(t)=Ae^{-10t}+\frac{1}{2}$ (A) và A được xác định từ điều kiện đầu như trước đây.

Thí dụ 4.3

Tìm $i(t)$ của mạch (H 4.11) khi t>0, cho $v(0)$=24 V



(H 4.11)

Ta có

$$i = i_n + i_f$$

⟐ Để xác định i_n ta lưu ý nó có cùng dạng của hiệu thế v ở 2 đầu tụ điện.

Thật vậy, tất cả các đáp ứng tự nhiên khác nhau trong một mạch thì liên hệ với nhau qua các phép toán cộng, trừ, vi tích phân; các phép toán này không làm thay đổi giá trị trên mũ mà nó chỉ làm thay đổi các hệ số của hàm mũ.

Thời hằng của mạch là:

$\tau = RC = 10x0{,}02 = 0{,}2$ s

$i_n = Ae^{-5t}$

⟐ Ở trạng thái thường trực, tụ điện tương đương mach hở:

$i_f = i = 1A$

Vậy $i(t) = Ae^{-5t} + 1$ (A)

⟐ Để xác định A, ta phải xác định $i(0_+)$

Viết phương trình cho vòng bên phải

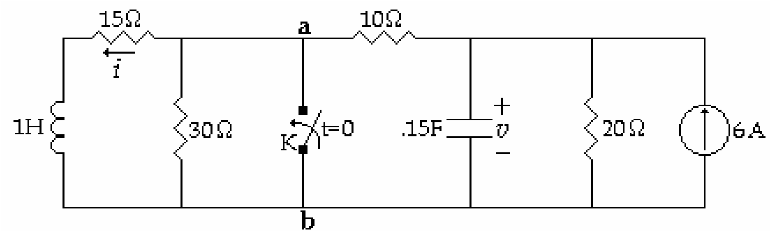
$-4\, i(0_+) + 6[1 - i(0_+)] + 24 = 0 \Rightarrow i(0_+) = 3$ A

$3 = A + 1 \Rightarrow A = 2$

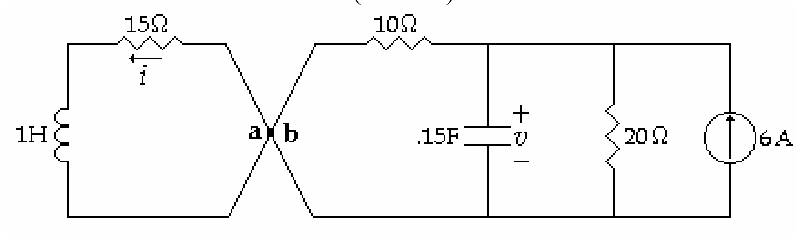
Vậy $i(t) = 2e^{-5t} + 1$ (A)

Thí dụ 4.4

Xác định i(t) và v(t) trong mạch (H 4.12a) khi t>0. Biết rằng mạch đạt trạng thái thường trực ở t=0- với khóa K hở.



(H 4.12a)



(H 4.12b)

Ở trạng thái thường trực (t=0-), tụ điện tương mạch hở và cuộn dây là mạch nôi tắt. Hiệu thế 2 đầu tụ là hiệu thế 2 đầu điện trở 20Ω và dòng điện qua cuộn dây chính là dòng qua điện trở 15Ω

Dùng cầu chia dòng điện xác định dễ dàng các giá trị này:

i(0-)=2A và v(0-) = 60 V

Khi đóng khóa K, ta đã nối tắt 2 nút a và b (H 4.12b).

Mạch chia thành 2 phần độc lập với nhau, mỗi phần có thể được giải riêng.

* Phần bên trái ab chứa cuộn dây là mạch không chứa nguồn:

$i(t) = Ae^{-15t}$ (A)

Với $i(0-) = i(0-) = 2 \Rightarrow A = 2$

$i(t) = 2e^{-15t}$ (A)

* Phần bên phải ab là mạch có chứa nguồn 6A và tụ .15F

Hiệu thế v(t) có thể xác định dễ dàng bằng phương pháp ngắn gọn:

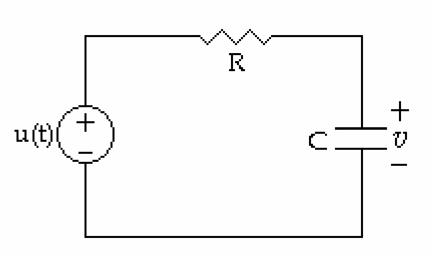
$v(t) = 20e^{-t}+40$ (V)

4.4 VÀI TRƯỜNG HỢP ĐẶC BIỆT

4.4.1 Đáp ứng đối với hàm nấc

Xét một mạch không chứa năng lượng ban đầu, kích thích bởi một nguồn là hàm nấc đơn vị. Đây là một trường hợp đặc biệt quan trọng trong thực tế.

Mạch (H 4.13), trong đó v_g=u(t)



(H 4.13)

Ap dụng KCL cho mạch

$$C\frac{dv}{dt}+\frac{v-u(t)}{R}=0$$

Hay

$$\frac{dv}{dt}+\frac{v}{RC}=\frac{1}{RC}u(t)$$

* Khi t < 0, u(t)=0, phương trình trở thành:

$\frac{dv}{dt}+\frac{v}{RC}=0$ và có nghiệm là: $v(t)=Ae^{-t/RC}$

Điều kiện đầu $v(0-) = 0 \Rightarrow A = 0$ và $v(t)=0$

* Khi t ≥ 0 , u(t) = 1, pt thành:

$$\frac{dv}{dt}+\frac{v}{RC}=\frac{1}{RC}$$

$v(t) = v_n+v_f$

v_f được xác định từ mạch ở trạng thái thường trực: $v_f = v_g$=u(t) = 1 V

$v(t)=Ae^{-t/RC} + 1$

Với $v(0+) = v(0-) = 0 \Rightarrow A = -1$

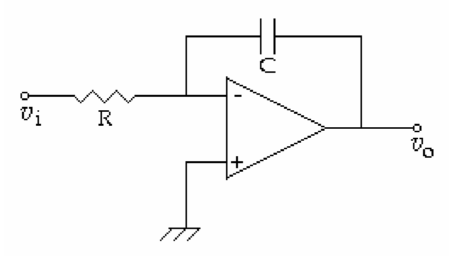
$v(t)=1- e^{-t/RC}$

Tóm lại $\begin{cases} v(t)=0\ , & t<0 \\ v(t)=1-e^{-t/RC}\ , & t\ge 0 \end{cases}$

Hay $v(t)=(1- e^{-t/RC})u(t)$ (V)

Thí dụ 4.5

Mạch (H 4.14). Xác định $v_o(t)$



(H 4.14)

Viết KCL ở ngã vào đảo của OPAMP:

$$\frac{v_i}{R} + C\frac{dv_o}{dt} = 0$$

Hay

$$\frac{dv_o}{dt} = -\frac{v_i}{RC}$$

Lấy tích phân từ pt 0_+ đến t

$$v_o(t) = -\frac{1}{RC}\int_{0_+}^{t} v_i dt + v_o(0+)$$

Ta thấy $v_o(t)$ tỉ lệ với tích phân của $v_i(t)$, nếu $v_o(0+)=0$.

Mạch này có tên là **mạch tích phân**.

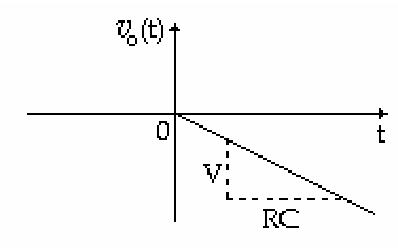
Xét trường hợp $v_i(t) = Vu(t)$

$$v_o(t) = -\frac{V}{RC}\int_{0_+}^{t} u(t)dt + v_o(0+)$$

Tụ điện không tích điện ban đầu nên $v_o(0+) = 0$

và $\quad v_o(t) = -\frac{V}{RC}tu(t)$

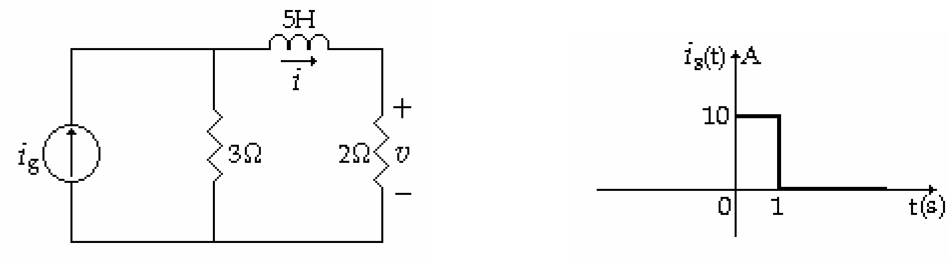
Đây chính là hàm dốc với độ dốc -V/RC. Giản đồ $v_o(t)$ được vẽ ở (H 4.15)



(H 4.15)

Thí dụ 4.6

Xác định $v(t)$ trong mạch (H 4.16a). Với nguồn kích thích $i_g(t)$ có dạng sóng như (H 4.16b)



(a) (b)

(H 4.16)

Mạch không tích trữ năng lượng ban đầu nên *i*(0-)=0; ở t=0 nguồn dòng điện 10A áp vào mạch, cho đến lúc t=1 s thì nguồn này bị ngắt (giống như mở khóa K)

Tóm lại, ta có thể hình dung mạch hoạt động như sau:

* 0<t<1, mạch có nguồn ngoài *i*=10A và không tích trữ năng lượng ban đầu.

* t ≥ 1, mạch không có nguồn ngoài và cuộn dây đã tích trữ năng lượng ứng với dòng *i*(1-)

Lời giải của bài toán gồm 2 phần:

* Khi 0<t<1, tìm đáp ứng đối với hàm nấc 10 A

$v(t) = v_n + v_f$

$v_n = Ae^{-(Rtđ/L)t} = Ae^{-5t/5} = Ae^{-t}$

$v_f = 2(10\frac{3}{3+2}) = 12$ V (nối tắt cuộn dây, dùng đl Ohm và cầu phân thế)

$v(t) = Ae^{-t} + 12$

i(t) là dòng điện qua điện trở 2Ω cũng là dòng điện qua cuộn dây, dòng điện này không thay đổi tức thời nên hiệu thế qua điện trở 2Ω cũng không thay đổi tức thời

$i(0+) = i(0-) = 0$ nên $v(0+) = v(0-) = 0$

suy ra A = -12

Tóm lại

$v(t) = 0$ khi $t < 0$

$v(t) = 12(1-e^{-t})$ khi $0 \le t \le 1$

* Khi t > 1, mạch không chứa nguồn nhưng có tích trữ năng lượng ban đầu, ta tìm đáp ứng tự nhiên của mạch:

$v(t) = Be^{-(t-1)}$

Ở t=1- , $v(1-) = 12(1-e^{-1})$

Ở t=1+ , $v(1+) = B$

Do tính liên tục: $v(1+) = v(1-) \Rightarrow B = 12(1-e^{-1})$

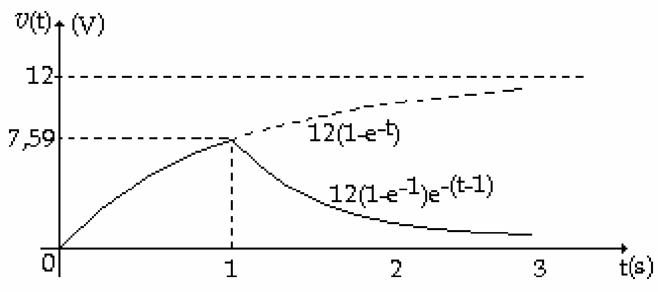
và lời giải cuối cùng:

$v(t) = 12(1-e^{-1})e^{-(t-1)}$ khi t>1

Lời giải cho mọi t:

$v(t) = 12(1-e^{-t})[u(t)-u(t-1)] + 12(1-e^{-1})e^{-(t-1)}u(t-1)$.

Giản đồ *v*(t) cho ở (H 4.17)



(H 14.7)

4.4.2 Áp dụng định lý chồng chất

Với các mạch có chứa 2 hay nhiều nguồn độc lập, chúng ta có thể dùng định lý chồng chất để giải

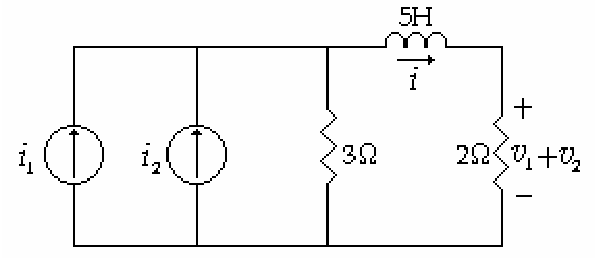
Trở lại thí dụ 4.6.

Nguồn dòng i_g trong mạch có thể viết lại:

$i_g = 10u(t) - 10u(t-1)$

Nguồn này có thể xem như gồm 2 nguồn mắc song song i_1 và i_2

$i_g = i_1 + i_2$ với $i_1 = 10\,u(t)$ và $i_2 = -10u(t-1)$ (H 4.18)



(H 4.18)

Gọi v_1 và v_2 lần lượt là các đáp ứng đối với từng nguồn i_1 và i_2

Trong phần trước ta đã xác định được:

$v_1(t) = 12(1-e^{-t})u(t)$

Dòng i_2 có dạng đảo của i_1 và trễ 1s.Vậy $v_2(t)$ có được bằng cách nhân $v_1(t)$ với -1 và thay t bởi (t-1):

$v_2(t) = -12(1-e^{-(t-1)})u(t-1)$

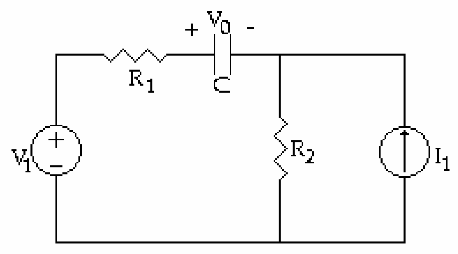
Và kết quả cuối cùng:

$v(t) = v_1(t) + v_2(t) = 12(1-e^{-t})u(t) -12(1-e^{-(t-1)})u(t-1)$

Kết quả này có vẻ như khác với kết quả trước. Tuy nhiên sinh viên có thể chứng minh hai kết quả chỉ là một.

Thí dụ 4.7

Mạch (H 4.19). Xác định hiệu thế $v(t)$ ở 2 đầu tụ khi t>0. Biết rằng tụ đã nạp điện ban đầu với hiệu thế V_0



(H 4.19)

Ap dụng KVL cho mắt lưới bên trái:

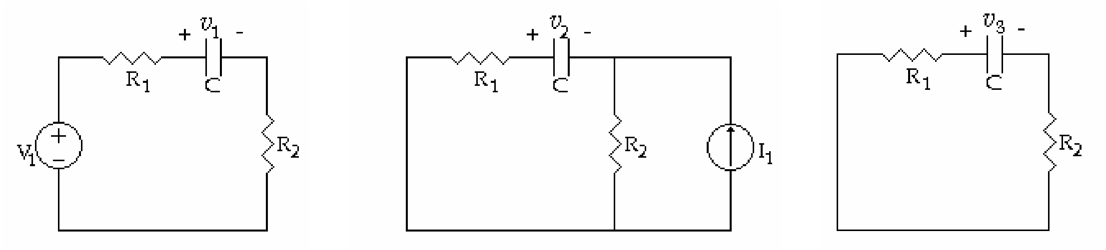
$$(R_1 + R_2)i + \frac{1}{C}\int i dt + V_0 = V_1 - R_2 I_1$$

Nhân 2 vế phương trình cho hằng số K

$$(R_1 + R_2)Ki + \frac{1}{C}\int Ki dt + KV_0 = KV_1 - R_2(KI_1)$$

Biểu thức cho thấy đáp ứng dòng điện *i* trở thành K*i* khi các nguồn độc lập (V_1& I_1) và hiệu thế ban đầu của tụ (V_0) nhân với K. Kết quả này có thể mở rộng cho mạch tuyến tính chứa một hoặc nhiều tụ điện (hay cuộn dây). Hiệu thế ban đầu của tụ (hay dòng điện ban đầu của cuộn dây) cũng được xem như một nguồn độc lập.

Ap dụng định lý chồng chất, ta xác định v là tổng của v_1, v_2 và v_3 lần lượt là đáp ứng riêng rẽ của V_1, I_1 và V_0. Các mạch điện tương ứng là (H 4.20a), (H 4.20b) và (H 4.20c)



(a) (b) (c)

(H 4.20)

Áp dụng phương pháp giải ngắn gọn, ta được các kết quả:

$v_1=V_1(1-e^{-t/(R1+R2)C})$

$v_2=-R_2I_1(1-e^{-t/(R1+R2)C})$

$v_3=V_0e^{-t/(R1+R2)C}$

Trong đó v_1 và v_2 là đáp ứng của mạch có chứa nguồn DC và v_3 là đáp ứng của mạch không chứa nguồn.

$$\begin{aligned}v(t) &= v_1+ v_2+ v_3 = V_1(1-e^{-t/R1+R2)C}) - R_2I_1(1-e^{-t/R1+R2)C})+ V_0e^{-t/R1+R2)C}\\ &= V_1- R_2I_1+(R_2I_1- V_1+ V_0)e^{-t/R1+R2)C}\end{aligned}$$

Có thể thấy ngay đáp ứng gồm 2 phần: đáp ứng ép và đáp ứng tự nhiên

$v_f = V_1- R_2I_1$

và $v_n=(R_2I_1- V_1+ V_0)e^{-t/R1+R2)C}$

Các kết quả này cũng có thể kiểm chứng như sau:

Từ (H 4.20a) và (H 4.20b) ta có ngay:

$v_{1f} = V_1$

$v_{2f} = - R_2I_1$

Và đáp ứng tự nhiên, xác định từ mạch không chứa nguồn:

$v_n =A e^{-t/R1+R2)C}$ A là hằng số tích phân

$v(t)= V_1- R_2I_1+Ae^{-t/R1+R2)C}$

Với $v(0)=V_0 \Rightarrow A= R_2I_1- V_1+V_0$

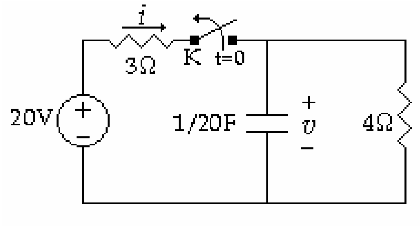
Ta được lại kết quả trên.

BÀI TẬP

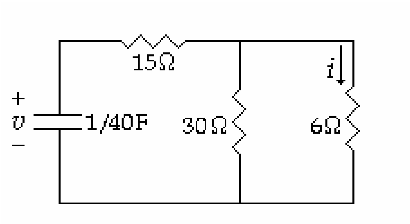
--o0o--

4.1 Mạch (H P4.1). Khóa K mở ở t=0 và $i(0_-)$=2 (A). Xác định v khi t>0

4.2 Mạch (H P4.2). Xác định v khi t>0, cho $i(0+)$=1 (A)

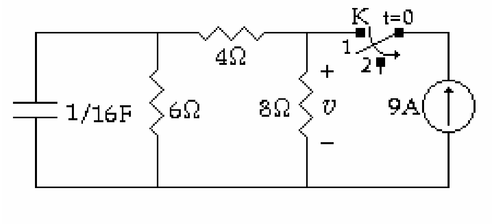


(H P4.1)



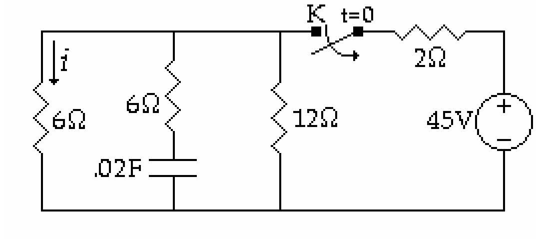
(H P4.2)

4.3 Mạch (H P4.3) đạt trạng thái thường trực ở t=0- với khóa K ở vị trí 1. Chuyển K sang vị trí 2, thời điểm t=0. Xác định *v* khi t>0



(H P4.3)

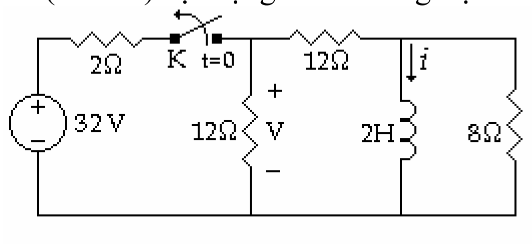
4.4 Mạch (H P4.4) đạt trạng thái thường trực ở $t=0_-$ với khóa K đóng. Xác định *i* khi t>0



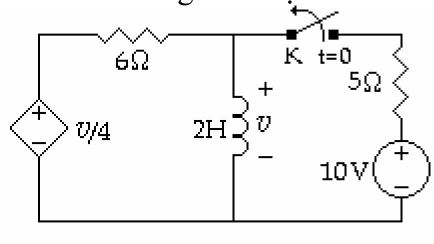
(H P4.4)

4.5 Mạch (H P4.5) đạt trạng thái thường trực ở $t=0_-$ với khóa K đóng. Xác định *i* và *v* khi t>0

4.6 Mạch (H P4.6) đạt trạng thái thường trực ở $t=0_-$ với khóa K đóng. Xác định *v* khi t>0



(H P4.5)

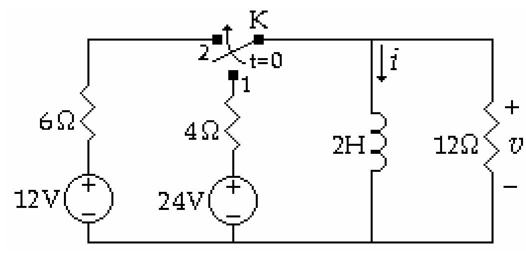


(H P4.6)

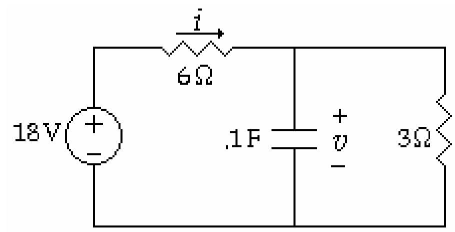
4.7 Mạch (H P4.7) đạt trạng thái thường trực ở $t=0_-$ với khóa K ở vị trí 1. Chuyển K sang vị trí 2, thời điểm t=0.

a. Xác định *i* khi t>0

b. Làm lại câu a, cuộn dây 2H được thay bằng tụ điện C=1/16 F



(H P4.7)



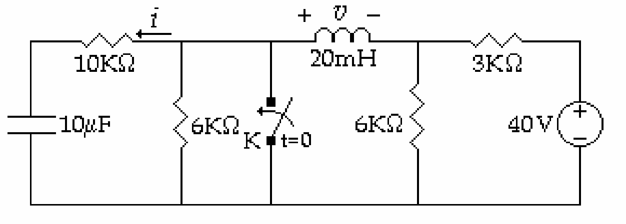
(H P4.8)

4.8 Mạch (H P4.8).

a. Xác định *v* khi t>0, cho $i(0_+)=1$ (A)

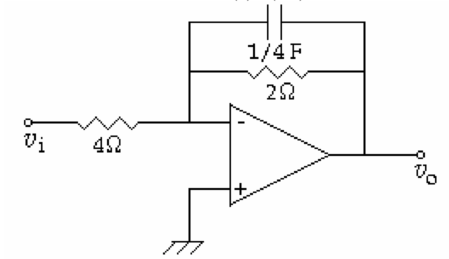
b. Làm lại bài toán, thay nguồn 18V bởi nguồn $6e^{-4t}$ (V) và mạch không tích trữ năng lượng ban đầu

4.9 Mạch (H P4.9) đạt trạng thái thường trực ở $t=0_-$ với khóa K mở. Xác định *i* và *v* khi t>0



(H P4.9)

4.10 Mạch (H P4.10). Xác định v_o, cho $v_i=5e^{-t}u(t)$ (V) và mạch không tích năng lượng ban đầu



(H P4.10)

✷ CHƯƠNG 5

MẠCH ĐIỆN BẬC HAI

✷ **MẠCH ĐIỆN VỚI HAI PHẦN TỬ TÍCH TRỮ NĂNG LƯỢNG (L&C)**
✷ **LỜI GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN BẬC HAI**
✧ Đáp ứng tự nhiên
✧ Đáp ứng ép
✧ Đáp ứng đầy đủ
✧ Điều kiện đầu và điều kiện cuối
✷ **TÍNH CHẤT VÀ Ý NGHĨA VẬT LÝ CỦA CÁC ĐÁP ỨNG**
✧ Đáp ứng tự nhiên
✧ Đáp ứng ép
✷ **ĐÁP ỨNG ÉP ĐỐI VỚI e^{st}**

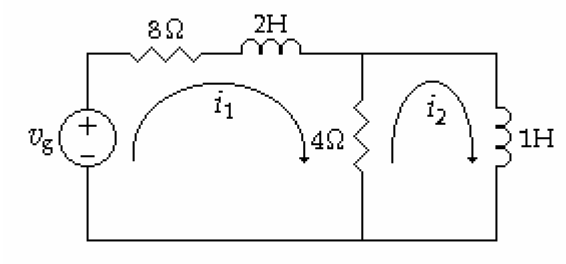
Trong chương trước chúng ta đã xét mạch đơn giản , chỉ chứa một phần tử tích trữ năng lượng (L hoặc C), và để giải các mạch này phải dùng phương trình vi phân bậc nhất.

Chương này sẽ xét đến dạng mạch phức tạp hơn, đó là các mạch chứa hai phần tử tích trữ năng lượng và để giải mạch phải dùng phương trình vi phân bậc hai.

Tổng quát, mạch chứa n phần tử L và C được diễn tả bởi phương trình vi phân bậc n. Tuy nhiên để giải các mạch rất phức tạp này, người ta thường dùng một phương pháp khác: **Phép biến đổi Laplace** mà ta sẽ bàn đến ở một chương sau.

5.1 MẠCH ĐIỆN VỚI HAI PHẦN TỬ TÍCH TRỮ NĂNG LƯỢNG (L&C)

Thí dụ 5.1: Xác định i_2 trong mạch (H 5.1)



(H 5.1)

Viết phương trình vòng cho mạch

$$2\frac{di_1}{dt}+12i_1-4i_2=v_g \qquad (1)$$

$$-4i_1+\frac{di_2}{dt}+4i_2=0 \qquad (2)$$

Từ (2): $$i_1=\frac{1}{4}\left(\frac{di_2}{dt}+4i_2\right) \qquad (3)$$

Lấy đạo hàm (3)

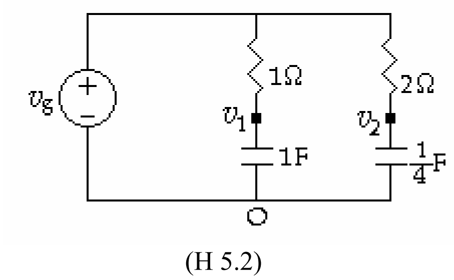
$$\frac{di_1}{dt}=\frac{1}{4}\left(\frac{d^2i_2}{dt^2}+4\frac{di_2}{dt}\right) \qquad (4)$$

Thay (3) và (4) vào (1) ta được phương trình để xác định i_2

$$\frac{d^2i_2}{dt^2}+10\frac{di_2}{dt}+16i_2=2v_g \qquad (5)$$

Phương trình để xác định i_2 là phương trình vi phân bậc 2 và mạch (H 5.1), có chứa 2 phần tử L và C, được gọi là mạch bậc 2.

Cũng có những ngoại lệ cho những mạch chứa 2 phần tử tích trữ năng lượng nhưng được diễn tả bởi các phương trình vi phân bậc 1. Mạch (H 5.2)



(H 5.2)

Chọn O làm chuẩn, viết KCL cho nút v_1 và v_2:

$$\frac{dv_1}{dt}+v_1=v_g \qquad (6)$$

$$\frac{dv_2}{dt}+2v_2=2v_g \qquad (7)$$

(6) và (7) là 2 phương trình vi phân bậc 1, mỗi phương trình chứa 1 ẩn số và không phụ thuộc lẫn nhau.

Ở mạch (H 5.2) vì cùng một nguồn v_g tác động lên hai mạch RC nên ta có thể thay mạch này bằng hai mạch, mỗi mạch gồm nguồn v_g và một nhánh RC, đây là 2 mạch bậc 1 , do đó phương trình cho mạch này không phải là phương trình bậc 2.

5.2 LỜI GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN BẬC HAI

Dạng tổng quát của phương trình vi phân bậc 2 với các hệ số là hằng số

$$\frac{d^2y}{dt^2}+a_1\frac{dy}{dt}+a_0y=F(t) \qquad (5.1)$$

a_1, a_0 là các hằng số thực, dương, y thay cho dòng điện hoặc hiệu thế và F(t) là một hàm tùy vào nguồn kích thích.

Ap dụng cho mạch (H 5.1) thì $a_1 = 10$, $a_0 = 16$, $y = i_2$ và $F(t) = 2v_g$

Nghiệm của phương trình (5.1) gồm 2 thành phần:

- Nghiệm tổng quát của phương trình không vế 2, chính là đáp ứng tự nhiên y_n
- Nghiệm riêng của phương trình có vế 2, chính là đáp ứng ép y_f:

$$y=y_n+y_f \qquad (5.2)$$

* Đáp ứng tự nhiên y_n là nghiệm của phương trình:

$$\frac{d^2y_n}{dt^2}+a_1\frac{dy_n}{dt}+a_0y_n=0 \qquad (5.3)$$

* Đáp ứng ép y_f là nghiệm của phương trình:

$$\frac{d^2y_f}{dt^2}+a_1\frac{dy_f}{dt}+a_0y_f=F(t) \qquad (5.4)$$

Cộng vế với vế của (5.3) và (5.4):

$$\frac{d^2(y_n+y_f)}{dt^2}+a_1\frac{d(y_n+y_f)}{dt}+a_0(y_n+y_f)=F(t) \qquad (5.5)$$

(5.5) kết hợp với (5.2) cho thấy nghiệm của phương trình (5.1) chính là $y=y_n+y_f$

5.2.1 Đáp ứng tự nhiên

Đáp ứng tự nhiên là lời giải phương trình (5.3)

y_n có dạng hàm mũ: $y_n=Ae^{st}$ (5.6)

Lấy đạo hàm (5.6), thay vào (5.10), ta được

$$As^2e^{st}+Aa_1se^{st}+Aa_0e^{st}=0$$

$$Ae^{st}(s^2+a_1s+a_0)=0$$

Vì Ae^{st} không thể =0 nên

$$s^2+a_1s+a_0=0 \qquad (5.7)$$

(5.7) được gọi là **phương trình đặc trưng**, có nghiệm là:

$$s_{1,2}=\frac{-a_1\pm\sqrt{a_1^{\,2}-4a_0}}{2} \qquad (5.8)$$

Ứng với mỗi trị của s ta có một đáp ứng tự nhiên:

$$y_{n1}=A_1e^{s_1t} \qquad y_{n2}=A_2e^{s_2t}$$

$$y_n=y_{n1}+y_{n2}=A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t} \qquad (5.9)$$

Trở lại thí dụ 5.1, đáp ứng tự nhiên của mạch:

$$\frac{d^2i_2}{dt^2}+10\frac{di_2}{dt}+16i_2=0$$

$s^2+10s+16=0 \quad \Rightarrow \quad s_1=-2\ ;\ s_2=-8$

$$i_2=A_1e^{-2t}+A_2e^{-8t}$$

✦ Các loại tần số tự nhiên

✸ $a_1^2-4a_0>0 \quad \Rightarrow \quad s_{1,2}=\dfrac{-a_1\pm\sqrt{a_1^2-4a_0}}{2} \quad \Rightarrow \quad y_n(t)=A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t}$

✸ $a_1^2-4a_0<0 \quad \Rightarrow \quad s_{1,2}=-\alpha\pm j\beta \quad \Rightarrow \quad y_n(t)=A_1e^{(-\alpha+j\beta)t}+A_2e^{(-\alpha-j\beta)t}$

Dùng công thức EULER: $e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$ và $e^{-j\theta}=\cos\theta-j\sin\theta$

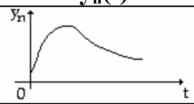
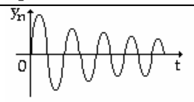
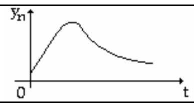
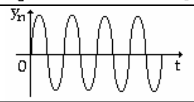
$$y_n(t)=e^{-\alpha t}(B_1\cos\beta t+B_2\sin\beta t)$$

Trong đó B_1 và B_2 xác định theo A_1 và A_2 : $B_1=A_1+A_2$ $\quad B_2=j(A_1-A_2)$

✸ $a_1^2-4a_0=0 \quad \Rightarrow \quad s_{1,2}=k<0 \quad \Rightarrow \quad y_n=(A_1+A_2t)e^{kt}$

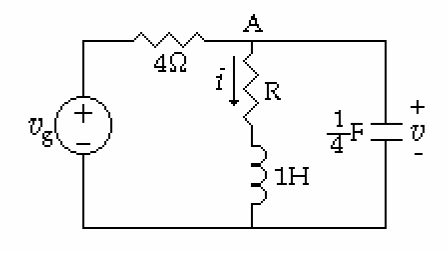
✸ $a_1=0$ và $a_0\neq 0 \quad \Rightarrow \quad s_{1,2}=\pm j\beta \quad \Rightarrow \quad y_n(t)=A_1\cos\beta t+A_2\sin\beta t$

Các kết quả trên có thể tóm tắt trong bảng 5.1

Trường hợp	Đ. kiện các hệ số	Nghiệm của p.t đặc trưng	$y_n(t)$	Dạng sóng của $y_n(t)$	Tính chất của $y_n(t)$
1	$a_1^2-4a_0>0$	Nghiêm thực, phân biệt, âm	$y_n(t)=A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t}$		Tắt dần không dao động
2	$a_1^2-4a_0<0$	Phức liên hợp $s_{1,2}=-\alpha\pm j\beta$ $(\alpha>0)$	$y_n(t)=e^{-\alpha t}(B_1\cos\beta t+B_2\sin\beta t)$		Dao động tắt dần
3	$a_1^2-4a_0=0$	Kép, thực $s_{1,2}=k<0$	$y_n(t)=(A_1+A_2t)e^{kt}$		Tắt dần tới hạn
4	$a_1=0$ $a_0\neq 0$	Ao, liên hợp $s_{1,2}=\pm j\beta$	$y_n(t)=A_1\cos\beta t+A_2\sin\beta t$		Dao động biên độ không đổi

Bảng 5.1

Thí dụ 5.2 Xác định đáp ứng tự nhiên v_n trong mạch (H 5.3)



(H 5.3)

Phương trình nút A:

$$\frac{v-v_g}{4}+i+\frac{1}{4}\frac{dv}{dt}=0 \qquad (1)$$

Phương trình vòng bên phải

$$Ri+\frac{di}{dt}=v \qquad (2)$$

Thay i từ (1) vào (2)

$$-R\left[\frac{1}{4}\left(\frac{dv}{dt}+v-v_g\right)\right]+\frac{d}{dt}\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{dv}{dt}+v-v_g\right)\right]=v \qquad (3)$$

Lấy đạo hàm (3) và đơn giản

$$\frac{d^2v}{dt^2}+(R+1)\frac{dv}{dt}+(R+4)v=Rv_g+\frac{dv_g}{dt} \qquad (4)$$

Đáp ứng tự nhiên là lời giải phương trình:

$$\frac{d^2v_n}{dt^2}+(R+1)\frac{dv_n}{dt}+(R+4)v_n=0 \qquad (5)$$

Phương trình đặc trưng và các nghiệm của nó:

$$s^2+(R+1)s+(R+4)=0$$

$$s_{1,2}=\frac{-(R+1)\pm\sqrt{(R+1)^2-4(R+4)}}{2}$$

$$s_{1,2}=\frac{-(R+1)\pm\sqrt{R^2-2R-15)}}{2}$$

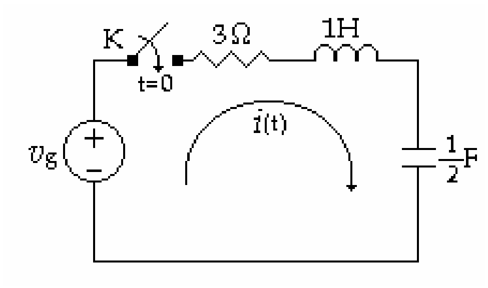
Kết quả ứng với vài giá trị cụ thể của điện trở R:

β R=6Ω, $s_{1,2}$= -2, -5 ⇒ $v_n=A_1e^{-2t}+A_2e^{-5t}$

β R=5Ω, $s_{1,2}$= -3, -3 ⇒ $v_n=(A_1+A_2t)e^{-3t}$

β R=1Ω, $s_{1,2}$= -1± j2 ⇒ $v_n=e^{-t}(B_1\cos 2t+B_2\sin 2t)$

Thí dụ 5.3 Xác định dòng $i(t)$ trong mạch (H 5.4). Cho v_g = 1 V là nguồn DC



(H 5.4)

Phương trình mạch:

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int i dt=v_g$$

Lấy vi phân 2 vế , thay các trị số vào:

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=0$$

$$\frac{d^2i}{dt^2}+3\frac{di}{dt}+2i=0$$

Phương trình đặc trưng và các nghiệm : $s^2+3s+2=0$ ⇒ $s_{1,2}$=-1, -2

Vậy $i(t)=i_n(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-2t}$

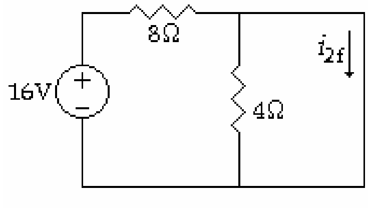
5.2.2 Đáp ứng ép

⁕ Trường hợp tổng quát

Đáp ứng ép của một mạch bậc 2 phải thỏa phương trình (5.4). Có nhiều phương pháp để xác định đáp ứng ép; ở đây ta dùng phương pháp dự đoán lời giải: Trong lúc giải phương trình cho các mạch bậc 1, ta đã thấy đáp ứng ép thường có dạng của hàm kích thích, điều này cũng đúng cho trường hợp mạch điện có bậc cao hơn, nghĩa là, nếu hàm kích thích là một hằng số thì đáp ứng ép cũng là hằng số, nếu hàm kích thích là một hàm mũ thì đáp ứng ép cũng là hàm mũ. . ..

Xét mạch thí dụ 5.1 với v_g=16V

$$\frac{d^2i_2}{dt^2}+10\frac{di_2}{dt}+16i_2=32 \qquad (1)$$



(H 5.5)

Đáp ứng ép i_{2f} là hằng sô: i_{2f}=A (2)

Lấy đạo hàm (2) và thay vào pt (1):

16A=32 ⇒ A=2 ⇒ i_{2f}=2

Ta có thể xác định i_{2f} nhờ mạch ở trạng thái thường trực DC: (H 5.5)

i_{2f}=16/8=2 A

Và đáp ứng đầy đủ của mạch: $i_2 = i_{2n} + i_{2f} = A_1e^{-2t} + A_2e^{-8t} + 2$

Bảng 5.2 cho kết quả đáp ứng ép ứng với các nguồn kích thích khác nhau

F(t)	$y_f(t)$
Hằng số A	Hằng số C
B_1t^n	$B_0t^n + B_1t^{n-1} + \dots + B_{n-1}t + B_n$
$B_2e^{\alpha t}$	$C\ e^{\alpha t}$
$B_3\sin\beta t$, $B_4\cos\beta t$	$A\sin\beta t + B\cos\beta t$
$B_5t^n\ e^{\alpha t}\cos\beta t$	$(F_0t^n + F_1t^{n-1} + \dots + F_{n-1}t + F_n)\ e^{\alpha t}\cos\beta t +$
$B_6t^n\ e^{\alpha t}\sin\beta t$	$(G_0t^n + G_1t^{n-1} + \dots + G_{n-1}t + G_n)\ e^{\alpha t}\sin\beta t$

Bảng 5.2

✷ **Đáp ứng ép khi kích thích ở tần số tự nhiên**

Phương trình mạch điện có dạng

$$\frac{d^2y}{dt^2} - (a+b)\frac{dy}{dt} + aby = e^{at} \qquad (5.10)$$

$s^2 - (a+b)s + ab = 0$ ⇒ s_1=a và s_2=b và $y_n = A_1e^{at} + A_2e^{bt}$

Đáp ứng ép $y_f=Ae^{at}$ phải thỏa (5.10), thay vào ta được

$0=e^{at}$ (đây là biểu thức không thể chấp nhận được)

Nếu chọn $y_f=Ate^{at}$, lấy đạo hàm , thay vào (5.10):

$Ate^{at}(a^2t+2a-(a+b)(at+1)+abt)= e^{at}$

Sau khi đơn giản:

$A(a-b)\ e^{at}= e^{at}$

Hệ thức đúng với mọi t nên:

$$A = \frac{1}{a-b}$$

và nghiệm tổng quát của phương trình (5.10) là

$$y = A_1e^{at} + A_2e^{bt} + \frac{te^{at}}{a-b} \qquad (5.11)$$

Trở lại thí dụ 5.1, cho v_g có chứa tần số tự nhiên:

$v_g=6e^{-2t}+32$

$$\frac{d^2i_2}{dt^2} + 10\frac{di_2}{dt} + 16i_2 = 12e^{-2t} + 64 \qquad (1)$$

$$i_{2n} = A_1e^{-2t} + A_2e^{-8t} \qquad (2)$$

Kích thích v_g có số hạng trùng với i_{2n} (e^{-2t}) nên i_{2f} xác định như sau:

$i_{2f}=Ate^{-2t}+B$ (3)

Lấy đạo hàm (3) và thay vào (1)

$6Ae^{-2t}+16B=12e^{-2t}+64$ ⇒ A=2 & B=4

$i_{2f}=2te^{-2t}+4$

$i_2 = i_{2n} + i_{2f} = A_1e^{-2t} + A_2e^{-8t} + 2te^{-2t} + 4$

⁕ **Trường hợp kích thích có tần số trùng với nghiệm kép của phương trình đặc trưng**

Phương trình mạch điện có dạng:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2a\frac{dy}{dt} + a^2y = e^{at} \qquad (5.12)$$

Phương trình đặc trưng

$s^2-2as+a^2=0 \quad \Rightarrow \quad s_1=s_2=a$

$y_n=(A_1+A_2t)e^{at}$

a là nghiệm kép của phương trình đặc trưng nên y_f xác định bởi:

$y_f=At^2e^{at}$

Lấy đạo hàm y_f và thay vào (5.12):

$2Ae^{at}=e^{at} \quad \Rightarrow \quad A=1/2 \Rightarrow y_f=(1/2)t^2e^{at}$

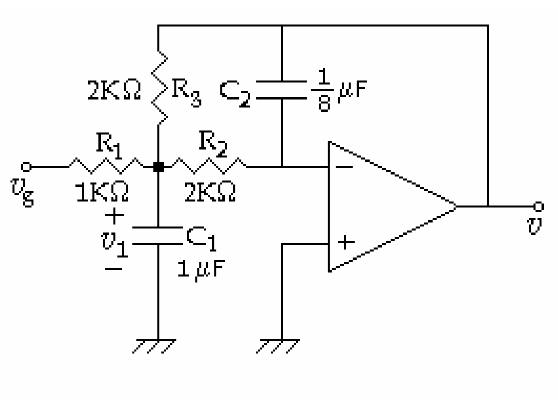
$$y=y_n+y_f= (A_1+A_2t)e^{at}+(1/2)t^2e^{at} \qquad (5.13)$$

5.2.3 Đáp ứng đầy đủ

Đáp ứng đầy đủ của mạch điện bậc 2 là tổng của đáp ứng ép và đáp ứng tự nhiên, trong đó có chứa 2 hằng số tích phân, được xác định bởi các điều kiện ban đầu, cụ thể là các giá trị của y(t) và dy(t)/dt ở thời điểm t=0.

Thí dụ 5.4

Xác định *v* khi t>0 của mạch (H 5.6). Cho v_g=5cos2000t (V) và mạch không tích trữ năng lượng ban đầu.



(H 5.6)

$$\frac{v_1 - v_g}{R_1} + \frac{v_1}{R_2} + \frac{v_1 - v}{R_3} + C_1\frac{dv_1}{dt} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{v_1}{R_2} + C_2\frac{dv}{dt} = 0 \qquad (2)$$

Thay trị số vào (1) và (2) và sắp xếp lại:

$$4v_1 - v + 210^3\frac{dv_1}{dt} = 2v_g = 10\cos 2000t \qquad (3)$$

$$v_1 = -\frac{1}{4}10^{-3}\frac{dv}{dt} \qquad (4)$$

Thay (4) vào (3), sau khi đơn giản:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2.10^3\frac{dv}{dt} + 2.10^6 v = -2.10^7\cos 2000t \qquad (5)$$

$$s^2+2.10^3s+2.10^6=0 \Rightarrow s_{1,2}=1000(-1\pm j) \qquad (6)$$

$$v_n=e^{-1000t}(A_1\cos 1000t+A_2\sin 1000t) \qquad (7)$$

$$v_f=A\cos 2000t+B\sin 2000t \qquad (8)$$

Xác định A và B:

Lấy đạo hàm (8) thay vào (5):

(-2A+4B)cos2000t+(-4A-2B)sin2000t=-20cos2000t

Cân bằng các hệ số

-2A+4B=20 và -4A-2B=0 ⇒ A=2 và B=-4

$$v=e^{-1000t}(A_1\cos 1000t+A_2\sin 1000t) +2\cos 2000t-4\sin 2000t \qquad (9)$$

Xác định A_1 và A_2: Thay t=0+ vào (4)

$$v_1(0+) = -\frac{1}{4}10^{-3}\frac{dv(0+)}{dt} \quad \text{vì} \quad v_1(0+)=v_1(0-)=0 \Rightarrow \frac{dv(0+)}{dt} = 0 \qquad (10)$$

$$v(0+)=v(0-)=0 \qquad (11)$$

Thay t=0 vào (9) rồi dùng điều kiện (11)

$$v\,(0)=A_1+2=0 \;\Rightarrow A_1=-2$$

Lấy đạo hàm (9), thay t=0 và dùng điều kiện (10)

$$1000A_2-1000A_1-8000=0 \Rightarrow A_2=6$$

Tóm lại:

$$v(t)=e^{-1000t}(-2\cos 1000t+6\sin 1000t) +2\cos 2000t- 4\sin 2000t \ \ (V)$$

5.2.4 Điều kiện đầu và điều kiện cuối

Có thể nói các điều kiện ban đầu và điều kiện cuối của mạch bậc 2 không khác gì so với mạch bậc 1. Tuy nhiên vì phải xác định 2 hằng số tích phân nên chúng ta cần phải có 2 giá trị đầu; 2 giá trị này thường được xác định bởi y(0+) và dy(0+)/dt.

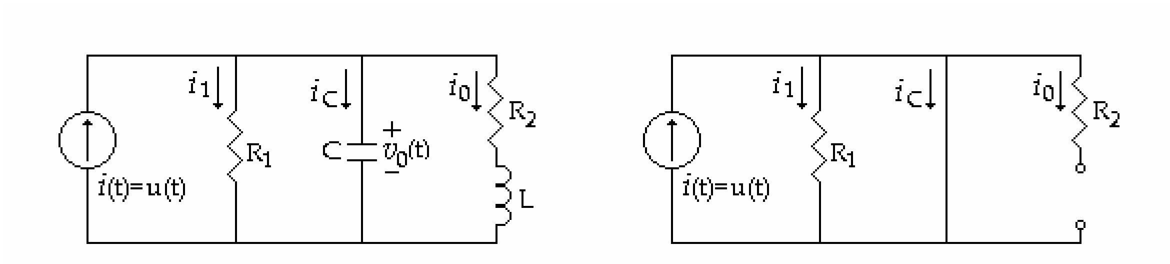
* y(0+) được xác định giống như ở chương 4, nghĩa là dựa vào tính chất hiệu thế 2 đầu tụ hoặc dòng điện qua cuộn dây không thay đổi tức thời.

* dy(0+)/dt thường được xác định bởi dòng điện qua tụ và hiệu thế 2 đầu cuộn dây vì:

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt} \text{ và } v_L = L\frac{di_L}{dt}$$

Thí dụ 5.5

Cho mạch (H 5.7a), xác định các điều kiện đầu $v_0(0+)$ và $\frac{dv_0(0_+)}{dt}$



(a) (H 5.7) (b)

$v_0(0+)=i_0(0+)=0$

(H 5.7b) là mạch tương đương ở t=0+

$$i_1(0+) = \frac{v_0(0+)}{R_1} = 0$$

$i_0(0+)=0$

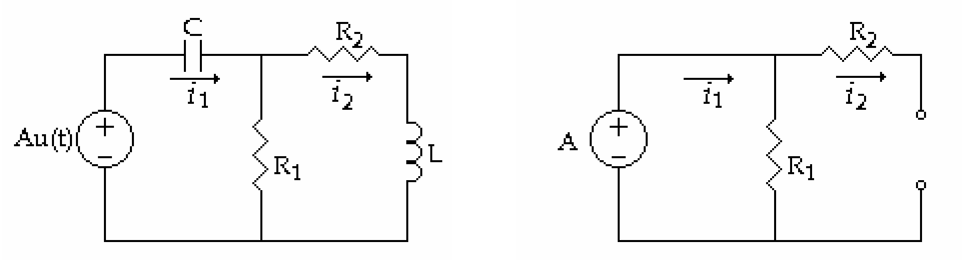
$i_C(0+)=i(0+)=1A$

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C}i_C$$

$$\frac{dv_0}{dt}(0+) = \frac{dv_C}{dt}(0+) = \frac{1}{C}i_C(0+) = \frac{1}{C} \text{ V/s}$$

Thí dụ 5.6

Xác định $i_1(0+)$, $i_2(0+)$, $\frac{di_1}{dt}(0+), \frac{di_2}{dt}(0+)$ (H 5.8 a)



(a) (H 5.8) (b)

Xác định $i_1(0+)$, $i_2(0+)$

Từ mạch tương đương ở t=0+ (H 5.8b)

$$i_1(0+) = \frac{A}{R_1} \qquad \text{và} \qquad i_2(0+)=0$$

Xác định $\frac{di_1}{dt}(0+), \frac{di_2}{dt}(0+)$

Viết phương trình vòng cho mạch khi t>0

$$\frac{1}{C}\int i_1 dt + R_1(i_1 - i_2) = A \qquad (1)$$

$$-R_1(i_1 - i_2) + R_2 i_2 + L\frac{di_2}{dt} = 0 \qquad (2)$$

Từ (2)

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{1}{L}\left[R_1 i_1 - (R_1 + R_2)i_2\right]$$

$$\frac{di_2}{dt}(0+) = \frac{1}{L}\left[R_1\frac{A}{R_1} - 0\right] = \frac{A}{L}$$

Đạo hàm theo t phương trình (1)

$$\frac{i_1}{C} + R_1\frac{di_1}{dt} - R_1\frac{di_2}{dt} = 0$$

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{1}{R_1}\left[-\frac{i_1}{C} + R_1\frac{di_2}{dt}\right]$$

$$\frac{di_1}{dt}(0+) = \frac{1}{R_1}\left[-\frac{1}{C}\frac{A}{R_1} + R_1\frac{A}{L}\right] = \frac{A}{L} - \frac{A}{CR_1^2}$$

Thí dụ 5.7

Trở lại thí dụ 5.3 dùng điều kiện đầu để xác định A_1 và A_2 trong kết quả của $i_n(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-2t}$

$$i(t)=i_n(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-2t} \qquad (1)$$

Ở t=0 , cuộn dây tương đương với mạch hở,

$$i(0+)=0 \qquad \Rightarrow \qquad A_1+A_2 = 0 \qquad (2)$$

Và tụ điện tương đương với mạch nối tắt

$$v_C(0+) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i dt = 0 \qquad (3)$$

Ngoài ra

$$Ri(0+)=0 \qquad (4)$$

Thay (3) và (4) vào phương trình mạch:

$$L\frac{di}{dt}(0+) = v_g \text{ hay } \frac{di}{dt}(0+) = \frac{v_g}{L} = 1$$

Lấy đạo hàm (1) , thay các trị số vào:

$$\frac{di}{dt}(0+) = -A_1 - 2A_2 = 1 \qquad (5)$$

Giải hệ thống (2) và (5):

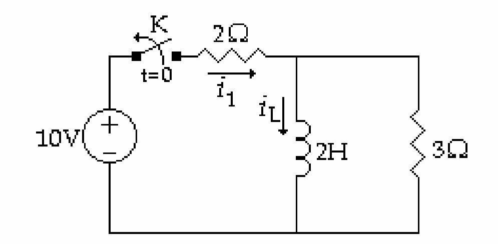
A_1=1 và A_2=-1

Và

$i(t)=e^{-t}- e^{-2t}$

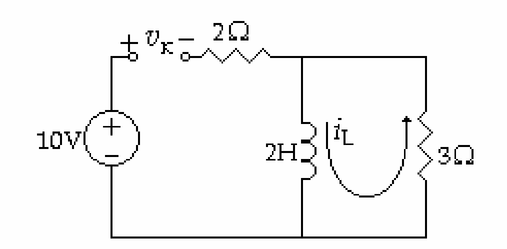
Thí dụ 5.8

Khóa K trong mạch (H 5.9a) đóng khá lâu để mạch đạt trạng thái thường trực. Mở khóa K tại thời điểm t=0, Tính v_K, hiệu thế ngang qua khóa K tại t=0+



(a)

(H 5.9)



(b)

$$i_1(0-) = i_L(0-) = \frac{10}{2} = 5A$$

Viết phương trình cho mạch khi t>0 (H 5.9b)

$$2\frac{di_L}{dt} + 3i_L = 0 \qquad \Rightarrow \qquad i_L = Ae^{-\frac{3}{2}t}$$

$$i_L(0+) = i_L(0-) = 5 \quad \Rightarrow \quad A=5 \quad \Rightarrow \quad i_L = 5e^{-\frac{3}{2}t}$$

khi t > 0 $\qquad v_K = 10 + R_3 i_L = 10 + 15e^{-\frac{3}{2}t}$

Ở t=0+ $\qquad v_K$=10+15=25V

Kết quả cho thấy: Do sự có mặt của cuộn dây trong mạch nên ngay khi mở khóa K, một hiệu thế rất lớn phát sinh giữa 2 đầu khóa K, có thể tạo ra tia lửa điện. Để giảm hiệu thế này ta phải mắc song song với cuộn dây một điện trở đủ nhỏ, trong thực tế, người ta thường mắc một Diod.

5.3 TÍNH CHẤT VÀ Ý NGHĨA VẬT LÝ CỦA CÁC ĐÁP ỨNG

5.3.1 Đáp ứng tự nhiên

Đáp ứng tự nhiên là nghiệm của phương trình vi phân bậc 2 thuần nhất, tương ứng với trường hợp không có tín hiệu vào (nguồn ngoài). Dạng của đáp ứng tự nhiên tùy thuộc vào nghiệm của phương trình đặc trưng, tức tùy thuộc các thông số của mạch. Tính chất của đáp ứng tự nhiên xác định dễ dàng nhờ vị trí của nghiệm của phương trình đặc trưng trên mặt phẳng phức.

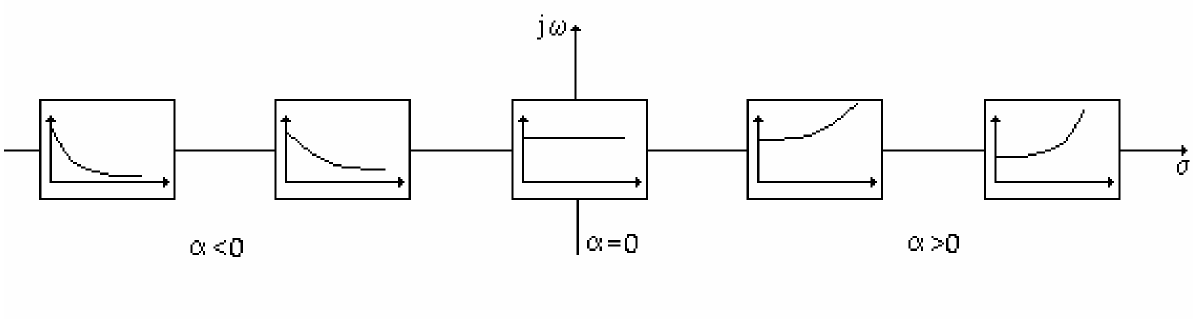
Gọi α và β là 2 số thực, cho biết khoảng cách từ nghiệm lần lượt đến trục ảo và trục thực.

Ta có các trường hợp sau:

✷ **Phương trình đặc trưng có nghiệm thực, phân biệt $s_{1,2}= \alpha_1, \alpha_2$**

Với trị thực của α, đáp ứng có dạng mũ (H 5.10)

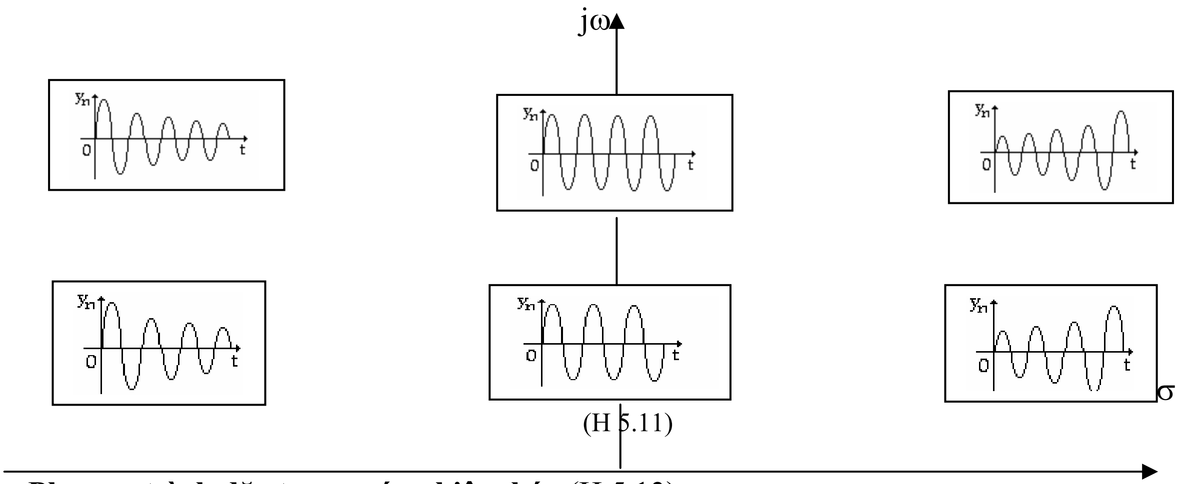
Tùy theo α>0, α=0 hay α<0 mà dạng sóng của đáp ứng là đường cong tăng theo t, đường thẳng hay đường cong giảm theo t.



(H 5.10)

✷ **Phương trình đặc trưng có nghiệm phức $s_{1,2}=-\alpha \pm j\beta$**

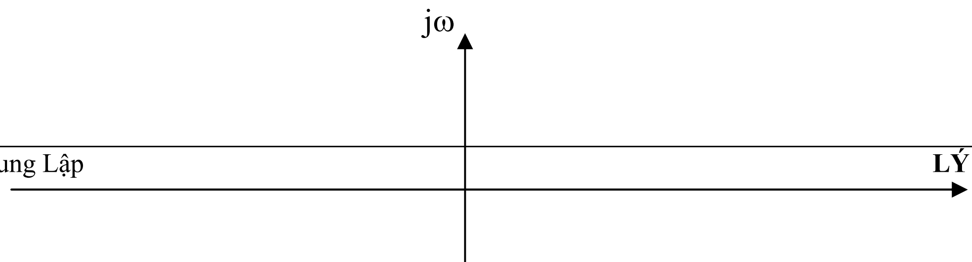
- Nếu đôi nghiệm phức nằm ở 1/2 trái của mặt phẳng (α và β ≠ 0), đáp ứng là dao động tắt dần (H 5.11)
- Nếu là nghiệm ảo (α=0 và β ≠ 0), đáp ứng là một dao động hình sin (H 5.11)
- Nếu đôi nghiệm phức nằm ở 1/2 phải của mặt phẳng (α và β ≠ 0), đáp ứng là dao động biên độ tăng dần (H 5.11)



(H 5.11)

✷ **Phương trình đặc trưng có nghiệm kép** (H 5.13)

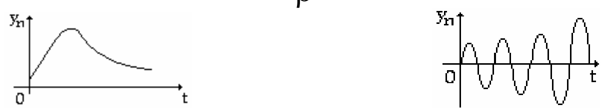
- Nghiệm kép trên trục thực : $s_1=s_2= -\alpha$ $y_n = (A_1 + A_2 t)e^{-\alpha t}$, đáp ứng có giá trị tắt dần tới hạn
- Nghiệm kép trên trục ảo $s_1=s_2=+j\beta$ hoặc $-j\beta$ $y_n=k_1\cos(\beta t+\Phi_1) + k_2 t\cos(\beta t+\Phi_2)$, đáp ứng là dao động biên độ tăng dần



+β

-α σ

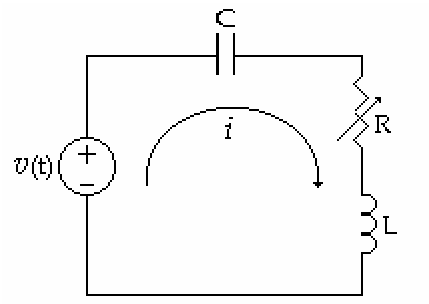
-β



(H 5.13)

Thí dụ 5.9

Khảo sát phương trình đặc trưng của mạch RLC nối tiếp.
Khi R thay đổi vẽ quỹ tích nghiệm s trên mặt phẳng phức



(H 5.14)

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int i\,dt=v(t) \qquad (1)$$

Lấy đạo hàm 2 vế

$$\frac{d^2 i}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di}{dt}+\frac{1}{LC}i=\frac{1}{L}\frac{dv}{dt} \qquad (2)$$

Phương trình đặc trưng

$$s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}=0 \qquad (3)$$

Đặt $\alpha=\frac{R}{2L}$ và $\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}$, (3) trở thành

$$s^2+2\alpha s+\omega_0^{\,2}=0 \qquad (4)$$

* $\alpha=0$ (R=0) $s=\pm j\omega_0$

Đáp ứng tự nhiên là dao động hình sin có biên độ không đổi, R=0 có nghĩa là công suất không tiêu tán thành nhiệt nên năng lượng tích trữ ban đầu không mất đi mà được chuyển hóa và trao đổi qua lại giữa tụ điện (điện trường) và cuộn dây (từ trường).

* $0<\alpha<\omega_0$ $s=-\alpha\pm j\sqrt{\omega_0^{\,2}-\alpha^2}=-\alpha\pm j\omega_d$

$y_n(t)=ke^{-\alpha t}\cos(\omega_d t+\Phi)$

Khoảng cách từ nghiệm đến gốc O của mặt phẳng phức là $\omega_0=\sqrt{\alpha^2+\omega_d^{\,2}}$, khi α thay đổi, quỹ tích nghiệm là vòng tròn tâm O, bán kính ω_0 (H 5.14). Đáp ứng tự nhiên là dao động hình sin có biên độ giảm dần theo dạng hàm mũ (do năng lượng mất đi dưới dạng nhiệt trên điện trở R).

$\alpha=\frac{R}{2L}$ được gọi là thừa số tắt dần.

$\omega_d=\sqrt{\frac{1}{LC}-\alpha^2}$ được gọi là tần số góc giã và $T_d=\frac{2\pi}{\omega_d}$ được gọi là chu kỳ giã của dao động tắt dần.

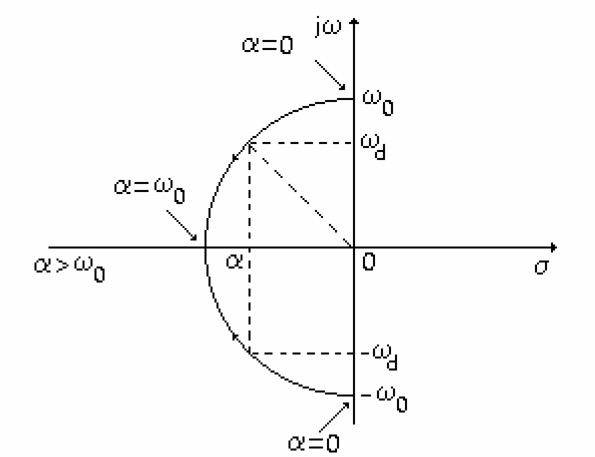
* $\alpha=\omega_0$ $s_1=s_2=-\alpha$ $y_n(t)=(k_1+k_2t)e^{-\alpha t}$

Đáp ứng có giá trị tắt dần tới hạn hay phi tuần hoàn.

* $\alpha>\omega_0$ $s_{1,2}=a<0$ (2 nghiệm âm phân biệt trên trục thực)

Đáp ứng tự nhiên tắt dần không dao động, nghĩa là R có trị khá lớn đủ để ngăn chận sự trao đổi năng lượng giữa L và C.

Tóm lại, khi $\alpha<\omega_0$ hay R< $R_C = 2\sqrt{\frac{1}{LC}}$ Mạch dao động hoặc tắt dần



(H 5.14)

R_C được gọi là điện trở tới hạn

Đặt $\Psi=\frac{\alpha}{\omega_0}$ Tỉ số giảm dao động

$s^2+2\Psi\omega_0 s+\omega_0^2=0$

* $\Psi=0$, Dao động thuần túy
* $0<\Psi<1$, Dao động tắt dần
* $\Psi>1$, Tắt dần không dao động
* R<0 (hay Ψ, $\alpha<0$), phương trình đặc trưng có nghiệm nằm ở 1/2 mặt phẳng phải và đáp ứng tăng không giới hạn, ta nói mạch bất ổn. Điện trở âm là một nguồn năng lượng, có được do tác dụng của một nguồn phụ thuộc lên một điện trở dương. Khi mạch thụ động có chứa nguồn năng lượng, đáp ứng tự nhiên có thể có giá trị tăng mãi theo thời gian và tạo ra một sự bất ổn.

5.3.2 Đáp ứng ép

Đáp ứng ép của một mạch chính là nghiệm riêng của phương trình có vế 2, nó tùy thuộc cả tín hiệu vào và các thành phần trong mạch điện.

Một trường hợp đặc biệt ảnh hưởng đến đáp ứng ép là khi một số hạng của F(t) có cùng dạng của $y_n(t)$. Lúc đó $y_f(t)$ được nhân với t. Về phương diện vật lý, điều này có nghĩa là mạch buộc phải đáp ứng như khi không có tín hiệu vào hay nói cách khác mạch bị kích thích theo một trong những cách vận chuyển tự nhiên của nó. Nói nôm na là mạch đáp ứng nhạy hơn bình thường và điều này được biểu thị một cách toán học bằng cách nhân với thừa số t.

Lưu ý là năng lượng tích trữ ban đầu chỉ ảnh hưởng đến độ lớn (các hằng số tích phân) chứ không ảnh hưởng đến dạng của $y_n(t)$. Mặt khác, các hằng số tích phân cũng tùy thuộc vào nguồn kích thích và các thành phần trong mạch. Chính vì những lý do này mà người ta chỉ xác định các hằng số tích phân sau khi có kết quả cuối cùng (đáp ứng đầy đủ). Tóm lại, khi tính toán đáp ứng của một mạch, các hằng số tích phân được xác định dựa trên đáp ứng đầy đủ $y(t)=y_n(t)+y_f(t)$ và các điều kiện ban đầu.

Ngoài ra, xét đến ảnh hưởng của đáp ứng của mạch theo diễn tiến thời gian, người ta chia đáp ứng của một mạch ra 2 thành phần: Thành phần chuyển tiếp (giao thời, transient time) và thành phần thường trực (steady state).

- Thành phần chuyển tiếp $y_t(t)$: triệt tiêu sau một khoảng thời gian.
- Thành phần thường trực $y_{ss}(t)$: còn lại sau khi thành phần chuyển tiếp triệt tiêu.

Nếu các nghiệm của phương trình đặc trưng đều ở 1/2 mặt phẳng trái hở và đáp ứng ép không triệt tiêu khi $t\to\infty$ thì

$y_t(t) = y_n(t)$

$y_{ss}(t) = y_f(t)$

5.4 ĐÁP ỨNG ÉP ĐỐI VỚI e^{st}

Trong phân giải mạch điện, một trường hợp đặc biệt cần quan tâm, đó là những mạch với tín hiệu vào có dạng hàm mũ e^{st}, s là hằng số độc lập với t. Chúng ta sẽ xét ngay dưới đây trường hợp này

Với x(t) và y(t) lần lượt là kích thích và đáp ứng, phương trình mạch điện có dạng tổng quát

$$a_n\frac{d^ny}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+...........+a_1\frac{dy}{dt}+a_0y=b_m\frac{d^mx}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}+..........+b_1\frac{dx}{dt}+b_0x \quad (5.14)$$

Cho $x(t) = e^{st} \Rightarrow y_f(t)= H(s)e^{st}$

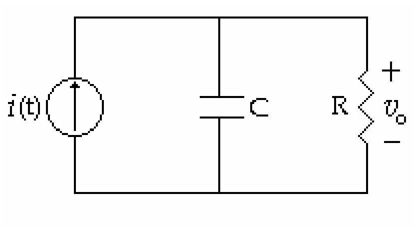
Bằng cách lấy đạo hàm $y_f(t)$ thay vào (5.14) ta xác định được H(s)

$$H(s)=\frac{b_ms^m+.....+b_1s+b_0}{a_ns^n+.....+a_1s+a_0} \quad (5.15)$$

H(s) được gọi là **hàm số mạch**, giữ vai trò rất quan trọng trong bài toán giải mạch.

Quan sát (5.15) ta sẽ thấy H(s) là tỉ số của 2 đa thức theo s có bậc là bậc của đạo hàm và các hệ số chính là các hệ số tương ứng của 2 vế của phương trình mạch điện. Vì vậy, khi có phương trình mạch điện ta có thể viết ngay ra hàm số mạch.

Thí dụ 5.9 Tìm đáp ứng $v_o(t)$ của mạch (H 5.15), cho $i(t)=e^{-t}$.



(H 5.15)

Phương trình mạch điện

$$C\frac{dv_o(t)}{dt}+\frac{1}{R}v_o(t)=i(t)$$

Hàm số mạch H(s)

$$H(s)=\frac{1}{sC+1/R}=\frac{R}{1+sRC}$$

Đáp ứng ép đối với $i(t)=e^{-t}$ là

$$v_{of}(t)=\frac{R}{1+sRC}e^{st}=\frac{R}{1-RC}e^{-t}$$

Thông số s trong hàm số mạch có thể là số thực hay phức. Trong thực tế tín hiệu vào thường là một hàm thực theo t. Tuy nhiên tính đáp ứng đối với một hàm phức cũng rất hữu ích vì từ đó chúng ta có thể suy ra đáp ứng đối với tín hiệu là hàm thực từ định lý sau đây:

" Nếu $y_f(t)$ là đáp ứng đối với tín hiệu phức x(t), đáp ứng đối với phần thực của x(t) chính là phần thực của $y_f(t)$ và đáp ứng đối với phần ảo của x(t) là phần ảo của $y_f(t)$"

* Trở lại **thí dụ 5.9**. Xét trường hợp kích thích có dạng x(t)= cosωt

Từ công thức EULER $e^{j\omega t}=\cos\omega t+j\sin\omega t$, ta thấy cosωt là phần thực của $e^{j\omega t}$

Vậy trước tiên ta tìm đáp ứng ép đối với $e^{j\omega t}$

$$v_{of}(t)=\frac{R}{1+j\omega RC}e^{j\omega t}$$

Dùng công thức EULER viết lại v_{of}:

$$v_{of}=\frac{R}{1+(\omega RC)^2}(1-j\omega RC)(\cos\omega t+j\sin\omega t)$$

Phần thực của đáp ứng ép $v_{of}(t)$

$$\mathrm{Re}\{v_{of}(t)\}=\frac{R}{1+(\omega RC)^2}(\cos\omega t+\omega RC\sin\omega t)$$

chính là đáp ứng ép của mạch đối với cosωt (vì cosωt =Re[$e^{j\omega t}$] là phần thực của $e^{j\omega t}$)

BÀI TẬP

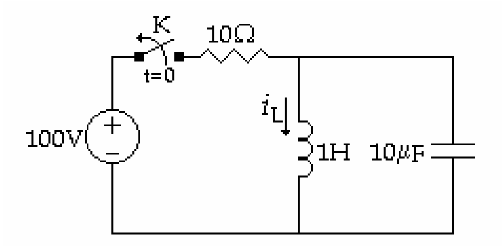
ꙮ✷ꙮ

5.1 Cho mạch điện (H P5.1), khóa K đóng cho tới khi mạch đạt trạng thái thường trực. Mở khóa K, coi thời điểm này là t=0. Xác định dòng i_L lúc t>0.

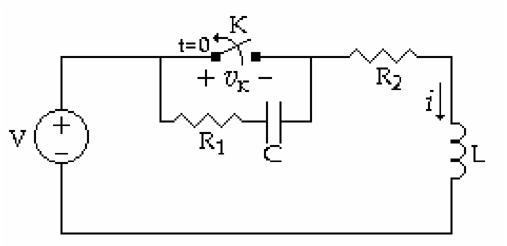
5.2 Cho mạch điện (H P5.2), khóa K đóng cho tới khi mạch đạt trạng thái thường trực. Mở khóa K, coi thời điểm này là t=0.

a. Tìm biểu thức của v_K, hiệu thế ngang qua khóa K ở t=0+.

b. Giả sử i(0+)=1 A và $\frac{di}{dt}(0+)=-1\ \mathrm{A/s}$. Xác định $\frac{dv_K}{dt}(0+)$



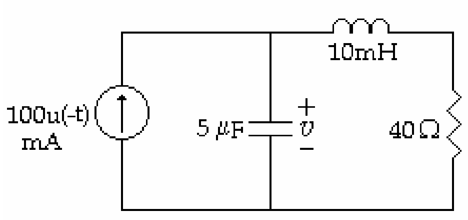
(H P5.1)



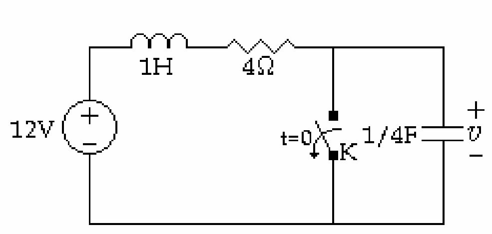
(H P5.2)

5.3 Mạch (H P5.3). Tìm v khi t>0.

5.4 Cho mạch điện (H P5.4), khóa K đóng cho tới khi mạch đạt trạng thái thường trực. Mở khóa K, coi thời điểm này là t=0. Tìm v khi t>0.



(H P5.3)



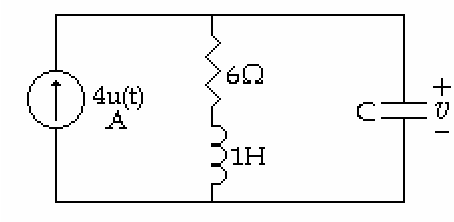
(H P5.4)

5.5 Cho mạch điện (H P5.5). Tìm v khi t>0 trong 2 trường hợp:

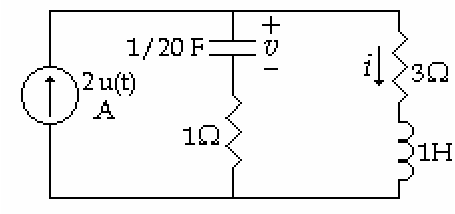
a. C=1/5 F

b. C=1/10 F

5.6 Cho mạch điện (H P5.6). Tìm v và i khi t>0



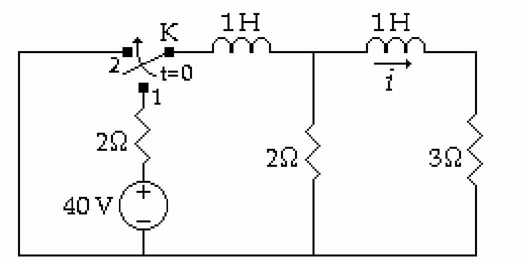
(H P5.5)



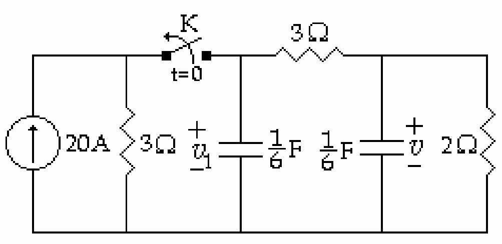
(H P5.6)

5.7 Mạch (H P5.7) đạt trạng thái thường trực ở t=0- với khóa K ở vị trí 1. Chuyển K sang vị trí 2, thời điểm t=0. Xác định *i* khi t>0

5.8 Mạch (H P5.8) đạt trạng thái thường trực ở t=0. Xác định *v* khi t>0



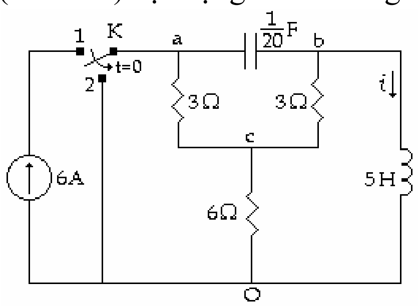
(H P5.7)



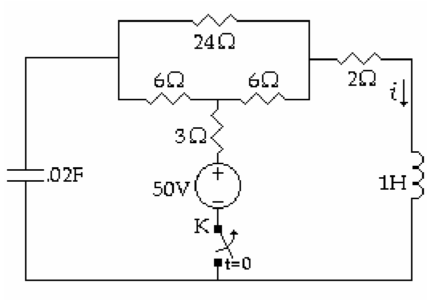
(H P5.8)

5.9 Mạch (H P5.9) đạt trạng thái thường trực ở t=0- Với khóa K ở 1. Tại t=0 bậc K sang vị trí 2. Xác định *i* khi t>0

5.10 Mạch (H P5.10) đạt trạng thái thường trực ở t=0- Xác định *i* khi t>0



(H P5.9)



(H P5.10)

Giải

Ở t>0, mạch chỉ còn cuộn dây và tụ điện mắc song song và đã tích trữ năng lượng.
Phương trình vòng cho mạch

$$L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\int i dt = 0 \qquad (1)$$

Lấy đạo hàm 2 vế phương trình (1)

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{1}{C}i = 0$$

Thay giá trị của L và C vào

$$\frac{d^2i}{dt^2}+10^5 i = 0 \qquad (2)$$

Phương trình đặc trưng

$$s^2+10^5=0 \qquad (3)$$

Cho nghiệm

$$s_{1,2}=\pm j100\sqrt{10} = \pm j316$$

Vậy

$$i(t) = A\cos 316t + B\sin 316t \qquad (4)$$

Xác định A và B

Từ mạch tương đương ở t = 0- (H P5.1a)

$i(0-) = 10$ (A) và $v(0-) = 0$

Từ kết quả (4)

$i(0+) = i(0-) = A = 10$

Ta lại có

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad v(0+) = v(0-) = L\frac{di}{dt}(0-) = 0$$

Hay $\frac{di}{dt}(0+) = \frac{di}{dt}(0-) = 0$ (5)

Lấy đạo hàm (4), cho t=0 và dùng kết quả (5)

$$\frac{di(0)}{dt} = 316\text{ B} = 0$$

B = 0

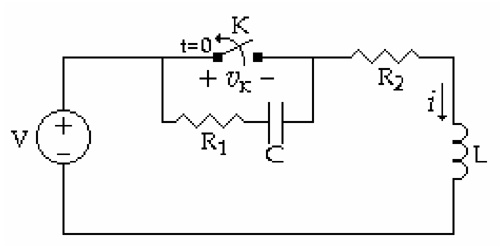
Tóm lại

***i*(t) = 10cos316t (A)**

5.2 Cho mạch điện (H P5.2), khóa K đóng cho tới khi mạch đạt trạng thái thường trực. Mở khóa K, coi thời điểm này là t=0.

c. Tìm biểu thức của v_K, hiệu thế ngang qua khóa K ở t=0+.

d. Giả sử i(0+)=1 A và $\frac{di}{dt}(0+) = -1\text{ A/s}$. Xác định $\frac{dv_K}{dt}(0+)$



(H P5.2)

Giải

a. Mạch đạt trạng thái thường trực với khóa K đóng

$$i(0-) = \frac{V}{R_2}$$

Tại t=0+, tụ điện tương đương mạch nối tắt nên hiệu thế v_K chính là hiệu thế 2 đầu R_1

$$v_K = R_1.\ i(0+) = R_1.\ i(0-) = R_1\frac{V}{R_2}.$$

$$\boldsymbol{v_K = R_1\frac{V}{R_2}}.$$

b. Xác định $\frac{dv_K}{dt}(0+)$

Hiệu thế v_K khi t>0 xác định bởi

$$v_K = R_1.\ i + \frac{1}{C}\int i\,dt$$

Lấy đạo hàm 2 vế

$$\frac{dv_K}{dt} = R_1\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i$$

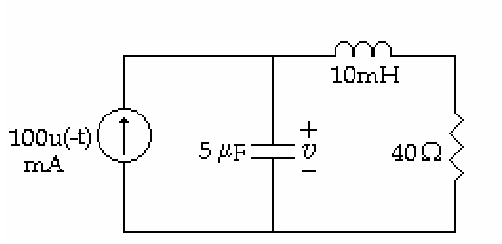
Tại t = 0+, thay i(0+)=1 A và $\frac{di}{dt}(0+) = -1\text{ A/s}$ vào phương trình

$$\frac{dv_K}{dt}(0+) = R_1\frac{di}{dt}(0+) + \frac{1}{C}i(0+) = R_1.(-1) + \frac{1}{C}(1)$$

Tóm lại

$$\boldsymbol{\frac{dv_K}{dt}(0+) = \frac{1}{C} - R_1}\ \textbf{A/s}$$

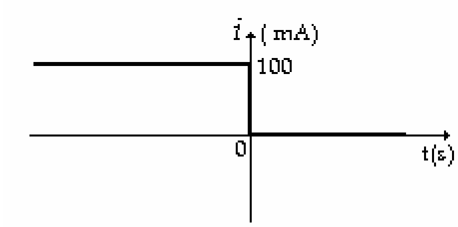
5.3 Mạch (H P5.3). Tìm v khi t>0.

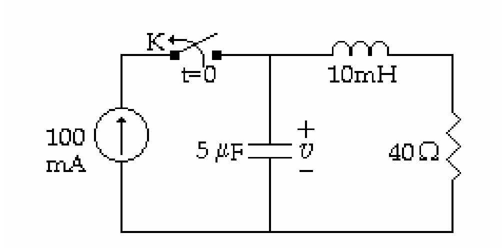


(H P5.3)

Giải

Dạng sóng của nguồn dòng điện 100u(-t) được vẽ ở (H P5.3a) và mạch tương đương với (H P5.3) được vẽ ở (H P5.3b)





(H P5.3a) (H P5.3b)

- Khi t>0, khóa K hở, mạch không chứa nguồn ngoài, phương trình mạch điện

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i dt = 0 \qquad (1)$$

Lấy đạo hàm (1) và thay trị số vào

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 4.10^3\frac{di}{dt} + 2.10^7 i = 0 \qquad (2)$$

Phương trình đặc trưng và nghiệm

$$s^2 + 4.10^3 s + 2.10^7 = 0 \qquad (3)$$

$$s_{1,2} = -2000 \pm j4000$$

Mạch không chứa nguồn ngoài nên đáp ứng chỉ là thành phần tự nhiên v_n

$$v = v_n = e^{-2000t}(A\cos 4000t + B\sin 4000t) \qquad (4)$$

Xác định A và B

Từ mạch tương đương ở t = 0- [(H P5.3) với tụ hở và cuộn dây nối tắt]

$v(0-) = 40\Omega.100mA = 4$ V và $i(0-) = 100$ mA = 0,1 A

Từ kết quả (4)

$v(0+) = v(0-) = A = 4$

Ta lại có

$$i(t) = i_C(t) = -C\frac{dv(t)}{dt}$$

$$= -5.10^{-6}[-2.10^3e^{-2000t}(A\cos 4.10^3t + B\sin 4.10^3t) + e^{-2000t}(-4.10^3A\sin 4.10^3t + 4.10^3B\cos 4.10^3t)]$$

Tại t=0 $i(0+) = i(0-) = 0,1 = -5.10^{-6}(-2.10^3A + 4.10^3B)$

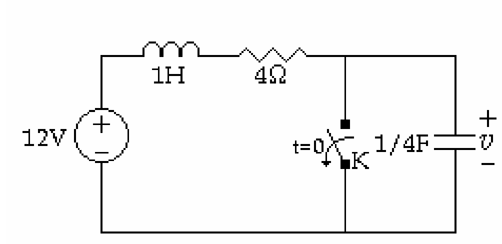
$\Rightarrow$ $-A+2B = -10$

Với A = 4 ta được B=-3

Tóm lại

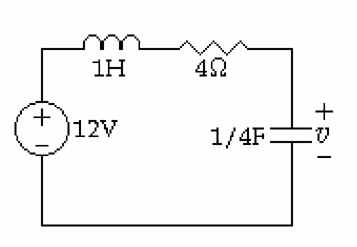
$$\boldsymbol{v(t) = e^{-2000t}(4\cos 4000t - 3\sin 4000t)\ (V)}$$

5.4 Cho mạch điện (H P5.4), khóa K đóng cho tới khi mạch đạt trạng thái thường trực. Mở khóa K, coi thời điểm này là t=0. Tìm v khi t>0.

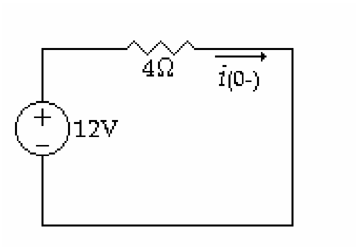


(H P5.4)

Giải



(H P5.4a)



(H P5.4b)

Phương trình cho mạch tương đương khi t>0 (H P5.4a)

$$\frac{di}{dt} + 4i + 4\int i dt = 12 \qquad (1)$$

Lấy đạo hàm (1)

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 4\frac{di}{dt} + 4i = 0 \qquad (2)$$

Phương trình đặc trưng và nghiệm

$$s^2 + 4s + 4 = 0 \qquad (3)$$

$s_{1,2} = -2$ (Nghiệm kép)

v(t) có dạng

$$v(t) = (At+B)e^{-2t} + 12 \ (v_f=12 \text{ V}) \qquad (4)$$

Xác định A và B

Từ mạch tương đương ở t = 0- (H P5.4b)

$i(0-) = 12V/4\Omega = 3$ A và $v(0-) = 0$

Từ kết quả (4)

$v(0+) = v(0-) = B+12 = 0 \Rightarrow B=-12$

Mặt khác

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{4}[Ae^{-2t} + (At+B)(-2)e^{-2t}]$$

$$i(0+) = i(0-) = 3 = \frac{1}{4}(A - 2B)$$

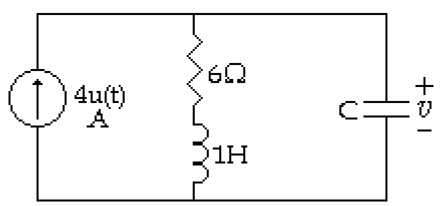
Với B = -12 ta được A = -12

Tóm lại

$\boldsymbol{v(t) = 12 - 12(1+t)e^{-2t}}$ **(V)**

5.5 Cho mạch điện (H P5.5). Tìm v khi t>0 trong 2 trường hợp:

c. C=1/5 F
d. C=1/10 F



(H P5.5)

Giải

Nguồn u(t) tương đương với khóa K đóng lúc t=0. Vậy đây là mạch bậc 2 không tích trữ năng lượng ban đầu nhưng có nguồn ngoài.
Đáp ứng v(t) của mạch gồm v_n và v_f.

β **Xác định v_f**

Lúc mạch đạt trạng thái thường trực, cuộn dây tương đương mạch nối tắt và tụ điện tương đương mạch hở nên v_f=6Ω.4A = 24 V

β **Xác định v_n**

Phương trình xác định v_n

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = 0 \qquad (1)$$

Thay L và R vào và lấy đạo hàm

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 6\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0 \qquad (2)$$

κ C=(1/5) F

Phương trình (2) thành

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 6\frac{di}{dt} + 5i = 0 \qquad (3)$$

Phương trình đặc trưng và nghiệm

$s^2 + 6s + 5 = 0 \Rightarrow \quad s_{1,2} = -1 \ \& \ -5$

$v_n = Ae^{-t} + Be^{-5t}$

$v(t) = v_n + v_f = Ae^{-t} + Be^{-5t} + 24 \qquad (4)$

Tại t = 0, $v(0) = 0 \Rightarrow A + B + 24 = 0 \qquad (5)$

Tại t = 0-, dòng qua cuộn dây là 0, nên lúc t = 0+, dòng này cũng bằng 0, do đó dòng qua tụ là 4A (nguồn dòng)

$$i_C(0+) = C\frac{dv}{dt}(0+) = 4$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dt}(0+) = \frac{4}{C} \qquad (6)$$

Lấy đạo hàm kết quả (4) ta được

$$\frac{dv(t)}{dt} = -Ae^{-t} - 5Be^{-5t}$$

$$\frac{dv}{dt}(0+) = -A - 5B \qquad (7)$$

(6) và (7) cho

$$-A - 5B = \frac{4}{C} = 20 \qquad (8)$$

Giải hệ (4) và (8)

A = - 25 và B = 1

Tóm lại

$v(t) = -25e^{-t} + e^{-5t} + 24$ (V)

κ C=(1/10) F

Phương trình (2) thành

$$\frac{d^2i}{dt^2}+6\frac{di}{dt}+10i=0 \qquad (3')$$

Phương trình đặc trưng và nghiệm

$s^2 + 6s + 10 = 0$

$s_{1,2} = -3 \pm j$

$v_n = e^{-3t}(A\cos t+B\sin t)$

$v(t) = v_n + v_f = e^{-3t}(A\cos t+B\sin t) + 24 (4')$

Dùng các điều kiện đầu như trên, ta được

Tại t = 0, $v(0) = 0 = A + 24$ (5')

$\Rightarrow$ A = - 24

Từ kết quả (4') ta được

$$\frac{dv(t)}{dt}=-3e^{-3t}(A\cos t+B\sin t)+e^{-3t}(-A\sin t+B\cos t)$$

$$\frac{dv}{dt}(0+)=-3A+B \qquad (7')$$

(6) và (7') cho

$-3A + B = 40$ (8')

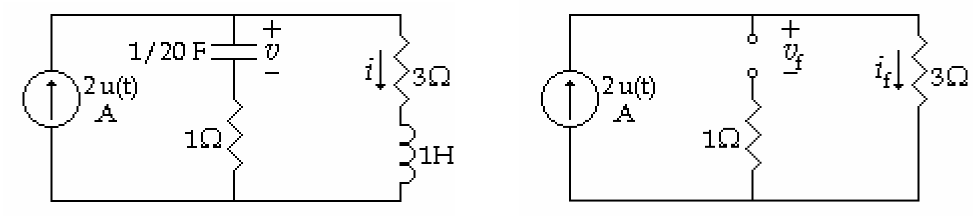
Thay A = - 24 vào (8') ta được

B = - 32

Tóm lại

$\boldsymbol{v(t) = e^{-3t}(-24\cos t - 32\sin t) + 24}$ **(V)**

5.6 Cho mạch điện (H P5.6a). Tìm v và i khi t>0



(a) (H P5.6) (b)

Giải

Nguồn u(t) tương đương với khóa K đóng lúc t=0. Vậy đây là mạch bậc 2 không tích trữ năng lượng ban đầu nhưng có nguồn ngoài.

Đáp ứng v(t) của mạch gồm v_n và v_f và i(t) ạch gồm i_n và i_f.

Lưu ý là các đáp ứng tự nhiên luôn có cùng dạng. Phần khác nhau trong các đáp ứng là các hằng số và đáp ứng ép.

β **Xác định các đáp ứng ép**

Từ mạch tương đương khi đạt trạng thái thường trực, ta tính được

$v_f = 3\Omega.2A = 6$ V và $i_f = 2A$

β **Xác định các đáp tự nhiên**

Viết KCL cho mạch

$$\frac{1}{20}\frac{dv}{dt}+i=2 \qquad (1)$$

Viết KVL cho vòng bên phải

$$\frac{di}{dt}+4i-2=v \qquad (2)$$

Từ (1) suy ra

$$i=-\frac{1}{40}\frac{dv}{dt} \quad \text{và} \quad \frac{d^2i}{dt^2}=-\frac{1}{40}\frac{dv}{dt}$$

Thay vào (2) và rút gọn

$$\frac{d^2v}{dt^2}+4\frac{dv}{dt}+20v=120 \qquad (3)$$

Phương trình đặc trưng và nghiệm

$s^2 + 4s + 20 = 0$

$s_{1,2} = -2 \pm j4$

$v_n = e^{-2t}(A\cos 4t+B\sin 4t)$

$v(t) = v_n + v_f = e^{-2t}(A\cos 4t+B\sin 4t) + 6$ (4)

$i(t) = i_n + i_f = e^{-2t}(C\cos 4t+D\sin 4t) + 2$ (4')

β **Xác định A và B**

Tại $t = 0$, $v(0) = 0 = A + 6$ (5')

⇒ $A = -6$

Tại t = 0-, dòng qua cuộn dây là 0, nên lúc t = 0+, dòng này cũng bằng 0, do đó dòng qua tụ là 2A (nguồn)

$$i_C(0+)=C\frac{dv}{dt}(0+)=2 \qquad (6)$$

Từ kết quả (4) ta được

$$\frac{dv(t)}{dt}=-2e^{-2t}(A\cos 4t+B\sin 4t)+e^{-2t}(-4A\sin 4t+4B\cos 4t)$$

$$\frac{dv}{dt}(0+)=-2A+4B \qquad (7)$$

(6) và (7) cho

$-2A + 4B = 40$ (8)

Thay $A = -6$ vào (8) ta được

$B = 7$

Tóm lại

$\boldsymbol{v(t) = e^{-2t}(-6\cos t+7\sin t) + 6}$ **(V)**

β **Xác định C và D**

$i(0) = 0 \Rightarrow C+2 = 0 \Rightarrow C = -2$

Tại t = 0-, dòng qua cuộn dây là 0, nên lúc t = 0+, dòng này cũng bằng 0, do đó dòng qua tụ là 2A (nguồn) tạo ra điện thế 2V ở 2 đầu điện trở 1Ω.Đây cũng chính là hiệu thế 2 đầu cuộn dây tại t = 0+

$$v_L(0+)=L\frac{di}{dt}(0+)=2 \qquad (6')$$

Từ (4') ta có

$$\frac{di(t)}{dt}=-2e^{-2t}(C\cos 4t+D\sin 4t)+e^{-2t}(-4C\sin 4t+4D\cos 4t)$$

$$\frac{di}{dt}(0+)=-2C+4D \qquad (7')$$

(6') và (7') cho

$-2C + 4D = 2$ (8')

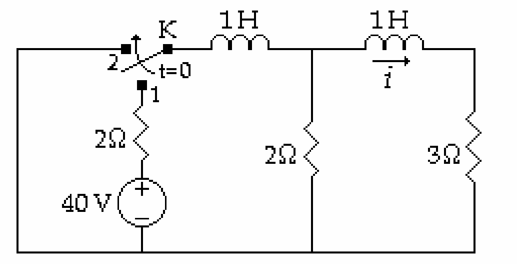
Thay $C = -2$ vào (8') ta được

$D = -\frac{1}{2}$

Tóm lại

$\boldsymbol{i(t) = e^{-2t}(-2\cos t - \frac{1}{2}\sin t) + 2}$ **(A)**

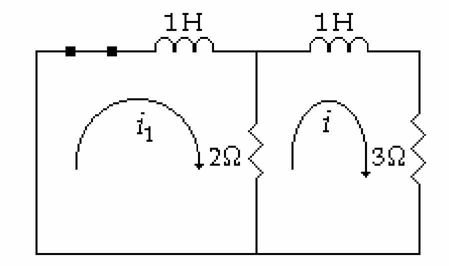
5.7 Mạch (H P5.7) đạt trạng thái thường trực ở t=0- với khóa K ở vị trí 1. Chuyển K sang vị trí 2, thời điểm t=0. Xác định *i* khi t>0



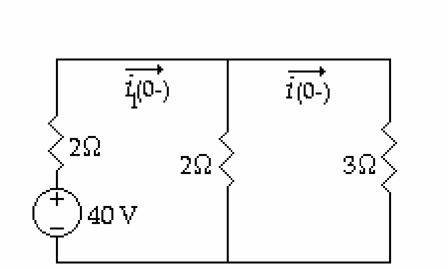
(H P5.7)

Giải

Khi t>0, khóa K ở vị trí 2, mạch không chứa nguồn ngoài nhưng có tích trữ năng lượng. Mạch tương đương được vẽ lại ở (H P5.7a)



(H P5.7a)



(H P5.7b)

Viết phương trình vòng cho mạch

$$\frac{di_1}{dt} + 2i_1 - 2i = 0 \qquad (1)$$

$$5i + \frac{di}{dt} - 2i_1 - = 0 \qquad (2)$$

Từ (2) suy ra

$$i_1 = \frac{1}{2}(5i + \frac{di}{dt}) \text{ và } \frac{di_1}{dt} = \frac{1}{2}(5\frac{di}{dt} + \frac{d^2i}{dt^2})$$

Thay các trị này vào (1), sau khi rút gọn

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 7\frac{di}{dt} + 6i = 0 \qquad (3)$$

Phương trình đặc trưng và nghiệm

$s^2 + 7s + 6 = 0 \Rightarrow \qquad s_{1,2} = -1 \ \& \ -6$

$i = Ae^{-t} + Be^{-6t} \qquad (4)$

Xác định A và B

Từ mạch tương đương ở t = 0- (H P5.7b), ta có

Điện trở tương đương của mạch

$R_{td} = 2\Omega + (2\Omega.3\Omega/2\Omega + 3\Omega) = 3,2\Omega$

$i_1(0-) = 40V/3,2\Omega = 12,5$ A

và $\qquad i(0-) = 12,5A\dfrac{2\Omega}{2\Omega + 3\Omega} = 5$ A

$i(0+) = i(0-) = 5$

$\Rightarrow \qquad A + B = 5 \qquad (5)$

Từ (2) suy ra

$$\frac{di}{dt}(0+) = -5i(0+) + 2(i_1(0+) = -25 + 25 = 0$$

Lấy đạo hàm kết quả (4) và thay điều kiện này vào

-A - 6B = 0 (6)

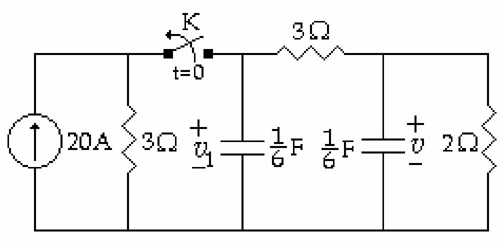
Giải hệ (5) và (6)

A = 6 và B = - 1

Tóm lại

***i*(t)= 6e^{-t} - e^{-6t} (A)**

5.8 Mạch (H P5.8) đạt trạng thái thường trực ở t=0. Xác định *v* khi t>0



(H P5.8)

Giải

Khi t>0, khóa K mở, ta có mạch không chứa nguồn ngoài

Viết KCL cho mạch

$$\frac{v_1 - v}{3} + \frac{1}{6}\frac{dv_1}{dt} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{v - v_1}{3} + \frac{v}{2} + \frac{1}{6}\frac{dv}{dt} = 0 \qquad (2)$$

Từ (2) suy ra

$$v_1 = \frac{1}{2}(5v + \frac{dv}{dt}) \text{ và } \frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{2}(5\frac{dv}{dt} + \frac{d^2v}{dt^2})$$

Thay các trị này vào (1), sau khi rút gọn

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 7\frac{dv}{dt} + 6v = 0 \qquad (3)$$

Phương trình đặc trưng và nghiệm

$s^2 + 7s + 6 = 0 \Rightarrow \quad s_{1,2} = -1 \ \& \ -6$

$v = Ae^{-t} + Be^{-6t}$ (4)

Xác định A và B

Từ mạch tương đương ở t = 0- ((H P5.8), trong đó các tụ là mạch hở) ta có

Điện trở tương đương của mạch

R_{td}= 3Ω(3Ω+2Ω)/(3Ω+2Ω+3Ω) = (15/8)Ω

v_1(0-) = 20A(15/8Ω) = 75/2 V

và v0-) = (75/2V)$\frac{2\Omega}{2\Omega + 3\Omega}$ = 15 V

v(0+) = v(0-) = 15

$\Rightarrow$ A+B = 15 (5)

Từ (2) suy ra

$$\frac{dv}{dt}(0+) = -5v(0+) + 2v_1(0+) = -75 + 75 = 0$$

Lấy đạo hàm kết quả (4) và thay điều kiện này vào

-A - 6B = 0 (6)

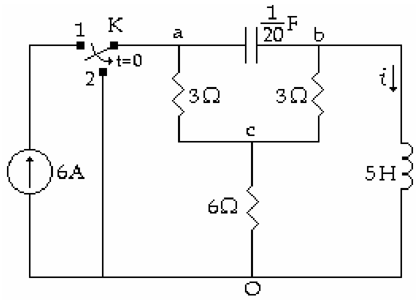
Giải hệ (5) và (6)

A = 18 và B = - 3

Tóm lại

***v*(t)= 18e^{-t} - 3e^{-6t} (V)**

5.9 Mạch (H P5.9) đạt trạng thái thường trực ở t=0. Với khóa K ở 1. Tại t=0 bậc K sang vị trí 2. Xác định *i* khi t>0

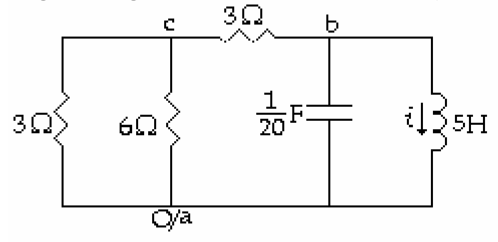


(H P5.9)

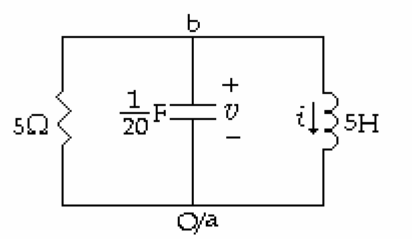
Giải

Khi t>0, khóa K ở vị trí 2, ta có mạch không chứa nguồn ngoài và đã tích trữ năng lượng ban đầu. Đáp ứng chính là đáp ứng tự nhiên.

Mạch tương đương ở t>0 trở thành mạch (H P5.9a) và được vẽ lại (H P5.9b)



(H P5.9a)



(H P5.9b)

Phương trình mạch điện

$$i+\frac{1}{20}\frac{dv}{dt}+\frac{v}{5}=0 \qquad (1)$$

Với $v=5\frac{di}{dt}$ và $\frac{dv}{dt}=5\frac{d^2i}{dt^2}$

Thay vào (1)

$$\frac{d^2i}{dt^2}+4\frac{di}{dt}+4i=0$$

Phương trình đặc trưng và nghiệm

$$s^2+4s+4=0 \qquad (3)$$

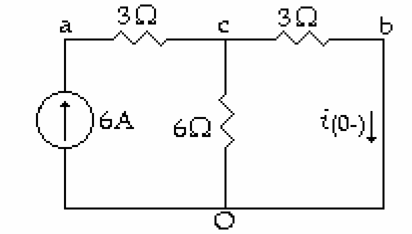
$s_{1,2}$ = -2 (Nghiệm kép)

i(t) có dạng

$$i(t)=(At+B)e^{-2t} \qquad (4)$$

Xác định A và B

Từ mạch tương đương ở t = 0- (H P5.9c)



(H P5.9c)

$i(0-) = 6A.6\Omega/6\Omega+3\Omega = 4$ A và

Từ kết quả (4)

$i(0+) = i(0-) = B = 4 \Rightarrow B = 4$

Mặt khác

$v(0-) = v_{ba}$=- 6A.[3Ω + (6Ω.3Ω/6Ω+3Ω) = -30 V

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} = 5[Ae^{-2t} + (At + B)(-2)e^{-2t}]$$

$$v(0) = L\frac{di}{dt}(0+) = [A - 2B)]$$

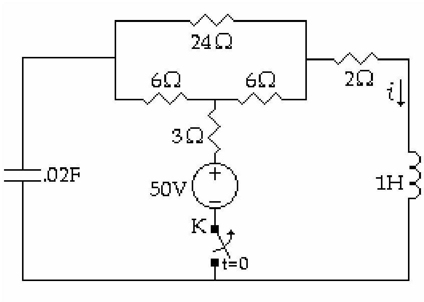
$v(0+) = v(0-) = -30 = 5(A-2B) = 5A-10B$

Với B = 4 ta được A = 2

Tóm lại

***i*(t)= (2t+4)e^{-2t} (A)**

5.10 Mạch (H P5.10) đạt trạng thái thường trực ở t=0. Xác định *i* khi t>0

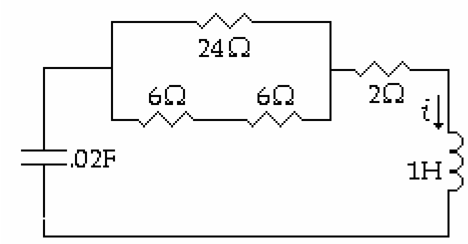


(H P5.10)

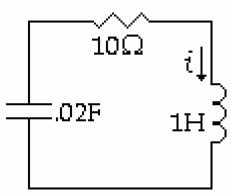
Giải

Khi t>0, khóa K hở, ta có mạch không chứa nguồn ngoài và đã tích trữ năng lượng ban đầu. Đáp ứng chính là đáp ứng tự nhiên.

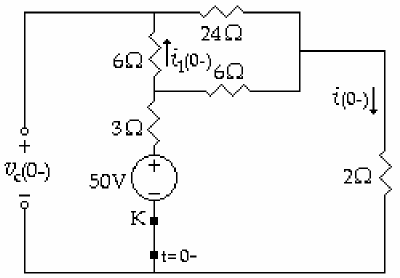
Mạch tương đương ở t>0 trở thành mạch (H P5.10a) và được vẽ lại (H P5.10b), trong đó nhóm điện trở của mạch tương đương một điện trở duy nhất = 10Ω



(H P5.10a)



(H P5.10b)



(H P5.10c)

Phương trình mạch điện

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 10\frac{di}{dt} + 50i = 0 \qquad (1)$$

Phương trình đặc trưng và nghiệm

$$s^2 + 10\,s + 50 = 0 \qquad (2)$$

$s_{1,2} = -5 \pm j5$

$$i(t) = e^{-5t}(A\cos 5t + B\sin 5t) \qquad (3)$$

β **Xác định A và B**

Mạch tương đương tại t = 0- được vẽ ở (H P5.10c)

R_{td}= 3Ω + (6Ω.30Ω /6Ω+30Ω) + 2Ω = 10Ω

$$i(0-) = \frac{50V}{R_{tđ}} = 5\ (A)$$

Từ kết quả (3)

$i(0+) = i(0-) = 5 \Rightarrow A = 5$

Ta lại có

$v_C(0-) = 50 - 3i(0-) - 6i_1(0-)$

Trong đó

$$i_1(0-) = i(0-)\frac{6\Omega}{6\Omega + 24\Omega + 6\Omega} = 5.\frac{1}{6} = \frac{5}{6}\text{A}$$

$v_C(0\text{-}) = 50\text{V} - 3\Omega.5\text{A} - 6\Omega\ (5/6\text{A}) = 30\ \text{V}$ (4)

Tại t = 0+

$$\Rightarrow \quad v_C(0+) = \frac{di}{dt}(0+) + 10i(0+) \qquad (5)$$

Từ kết quả (3) cho

$$\frac{di}{dt} = -5e^{-5t}(A\cos 5t + B\sin 5t) + e^{-5t}(-5A\sin 5t + 5B\cos 5t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{di}{dt}(0+) = -5A + 5B \qquad (6)$$

(5) và (6) cho

$-5A + 5B + 10x5 = 30$ (7)

Thay A = 5 vào (7) ta được

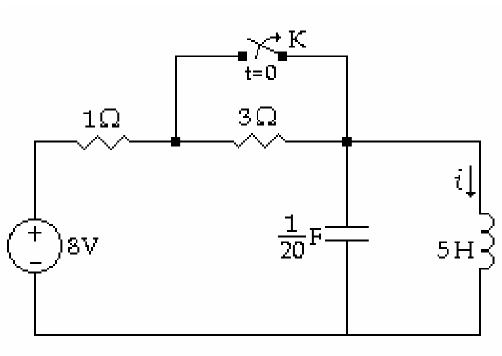
B = 1

Tóm lại

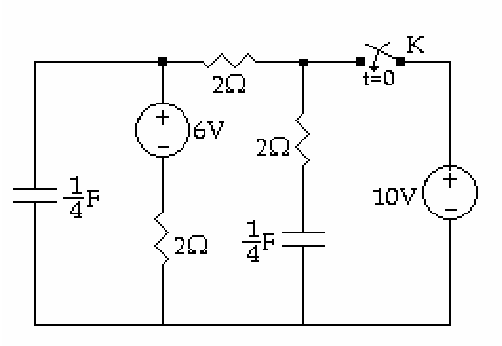
$i(t) = e^{-5t}(5\cos t + \sin t)$ (A)

5.11 Mạch (H P5.11) đạt trạng thái thường trực ở t=0. Xác định i khi t>0

5.12 Mạch (H P5.12) đạt trạng thái thường trực ở t=0. Xác định v_1 và v_2 khi t>0



(H P5.11)



(H P5.12)

✳ CHƯƠNG 6

TRẠNG THÁI THƯỜNG TRỰC AC

✳ **PHƯƠNG PHÁP CỔ ĐIỂN - DÙNG PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN**
✳ **PHƯƠNG PHÁP DÙNG SỐ PHỨC**
⌘ Sơ lược về số phức
⌘ Dùng số phức để giải mạch
✳ **VECTƠ PHA**
✳ **HỆ THỨC V-I CỦA CÁC PHẦN TỬ R, L, C.**
✳ **TỔNG TRỞ VÀ TỔNG DẪN PHỨC**
✳ **PHƯƠNG PHÁP TỔNG QUÁT GIẢI MẠCH CÓ KÍCH THÍCH HÌNH SIN**
✳ **MẠCH KÍCH THÍCH BỞI NHIỀU NGUỒN CÓ TẦN SỐ KHÁC NHAU**

Chương trước đã xét mạch RC và RL với nguồn kích thích trong đa số trường hợp là tín hiệu DC.

Chương này đặc biệt quan tâm tới trường hợp tín hiệu vào có dạng hình sin, biên độ không đổi. Đây là trường hợp đặc biệt quan trọng, gặp nhiều trong thực tế: Điện kỹ nghệ, dòng điện đặc trưng cho âm thanh, hình ảnh. . . đều là những dòng điện hình sin. Hơn nữa, một tín hiệu tuần hoàn không sin cũng có thể được phân tích thành tổng của những hàm sin.

Mặc dù những phương pháp nêu ở chương trước vẫn có thể dùng để giải mạch với kích thích hình sin, nhưng cũng có những kỹ thuật giúp ta giải bài toán một cách đơn giản hơn.

Chúng ta giả sử đáp ứng tự nhiên $y_n(t) \to 0$ khi $t \to \infty$ để đáp ứng ép $y_f(t)$ chính là đáp ứng ở trạng thái thường trực $y_{ss}(t)$. Để có được điều này, nghiệm của phương trình đặc trưng phải có phần thực âm, tức vị trí của nó phải ở 1/2 trái hở của mặt phẳng s.

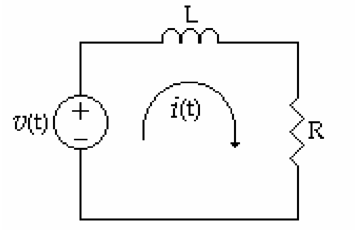
Để có thể so sánh các phương pháp giải, chúng ta sẽ bắt đầu bằng phương pháp cổ điển, sau đó dùng số phức và vectơ pha để giải lại bài toán.

Cuối cùng chúng ta sẽ thấy rằng việc áp dụng các định luật Kirchhoff, các định lý, các phương trình mạch điện ở chương 2 và 3 vào các mạch với kích thích hình sin cũng hoàn toàn giống như áp dụng cho mạch với nguồn DC

6.1 PHƯƠNG PHÁP CỔ ĐIỂN - DÙNG PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Thí dụ 6.1

Xác định đáp ứng ép *i*(t) của mạch (H 6.1) với nguồn kích thích *v*(t)=Vcosωt



(H 6.1)

Phương trình mạch điện

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = V\cos\omega t \qquad (1)$$

Đáp ứng ép có dạng:

$i(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t$ (2)

Lấy đạo hàm (2), thay vào (1), suy ra được A và B

$$A=\frac{RV}{R^2+\omega^2L^2} \quad (3)$$

$$B=\frac{\omega LV}{R^2+\omega^2L^2} \quad (4)$$

Vậy $i(t)=\dfrac{RV}{R^2+\omega^2L^2}\cos\omega t+\dfrac{\omega LV}{R^2+\omega^2L^2}\sin\omega t$ (5)

Thường ta hay viết $i(t)$ dưới dạng

$i(t)=I\cos(\omega t+\Phi)$ (6)

Vậy, dùng biến đổi lượng giác cho hệ thức (5)

$$i(t)=\frac{V}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos(\omega t-\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}) \quad (7)$$

Trong đó $I=\dfrac{V}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$ và $\Phi=-\tan^{-1}\dfrac{\omega L}{R}$

6.2 PHƯƠNG PHÁP SỐ PHỨC

6.2.1 Sơ lược về số phức

Một số phức được viết dưới dạng chữ nhật

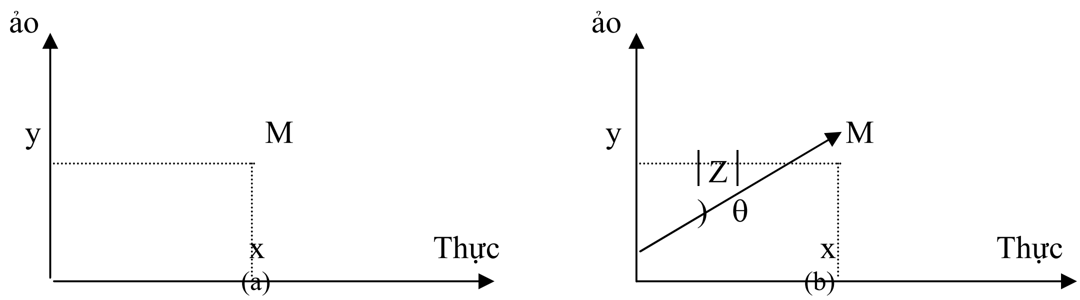
$Z=x+jy$ (6.1)

x là phần thực của Z, ký hiệu x=Re[Z],
y là phần ảo của Z, ký hiệu y=Im[Z],
j: số ảo đơn vị, xác định bởi $j^2=-1$

Biểu diễn số phức trên mặt phẳng phức (biểu diễn hình học)

(H 6.2) là các cách biểu diễn khác nhau của một số phức trên mặt phẳng phức:

- Điểm M với tọa độ x và y trên trục thực và trục ảo.
- Vectơ $\overrightarrow{OM}$, với suất |Z| và góc θ



(H 6.2)

Với cách xác định số phức bằng vectơ (H 6.2b), số phức được viết dưới dạng cực:

$Z=|Z|\,e^{j\theta}=|Z|\angle\theta$ (6.2)

Dưới đây là các biểu thức quan hệ giữa các thành phần của số phức trong hai cách biểu diễn, các biểu thức này cho phép biến đổi qua lại giữa hai cách viết:

$x=|Z|\cos\theta$, $y=|Z|\sin\theta$ (6.3)

$Z=x+jy=|Z|\cos\theta+j|Z|\sin\theta=|Z|e^{j\theta}$ (6.4)

(6.4) là cách viết số phức dưới dạng chữ nhật nhờ các thành phần trong dạng cực.

trực AC -

$$|Z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$Z = \sqrt{x^2 + y^2}\, e^{\tan^{-1}\frac{y}{x}} \qquad (6.5)$$

(6.5) là cách viết số phức dưới dạng cực nhờ các thành phần trong dạng chữ nhật.

6.2.2 Các phép toán với số phức

- Công thức Euler

$$e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j\sin\theta \qquad (6.6)$$

Với $\theta=\pi/2 \Rightarrow e^{j\theta}=e^{j\pi/2}=j$

Từ công thức Euler, ta cũng suy ra được:

$$\mathrm{Cos}\theta = \mathrm{Re}[e^{j\theta}] = \frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2} \qquad (6.7)$$

và $$\mathrm{Sin}\theta = \mathrm{Im}[e^{j\theta}] = \frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j} \qquad (6.8)$$

- Số phức liên hợp Z^* là số phức liên hợp của Z:

$$Z=x+jy \Rightarrow Z^*=x-jy \qquad (6.9)$$

- Phép cộng và trừ: Dùng dạng chữ nhật:

Cho $Z_1=x_1+jy_1$ và $Z_2=x_2+jy_2$

$$Z= Z_1\pm Z_2= (x_1\pm x_2) + j(y_1\pm y_2) \qquad (6.10)$$

- Phép nhân và chia: Dùng dạng cực:

Cho $Z_1=|Z_1|\, e^{j\theta_1}$ và $Z_2=|Z_2|\, e^{j\theta_2}$

$$Z= Z_1 . Z_2=|Z_1| . |Z_2|\, e^{j(\theta_1+\theta_2)} \qquad (6.11)$$

$$Z=\frac{|Z_1|}{|Z_2|} e^{j(\theta_1-\theta_2)} \qquad (6.12)$$

✸ Khi nhân số phức với $j =1\angle 90^o$ ta được một số phức có suất không đổi nhưng đối số tăng 90^o tương ứng với vectơ biểu diễn quay một góc $+90^o$

✸ Khi chia số phức với $j=1\angle 90^o$ ta được một số phức có suất không đổi nhưng đối số giảm 90^o tương ứng với vectơ biểu diễn quay một góc -90^o

6.2.3 Dùng số phức để giải mạch

Ap dụng số phức vào thí dụ 6.1, giả sử nguồn kích thích là:

$$v_1(t)=Ve^{j\omega t} \qquad (1)$$

Đáp ứng ép $i_1(t)$ xác định bởi phương trình:

$$L\frac{di_1(t)}{dt} + Ri_1(t) = v_1 = Ve^{j\omega t} \qquad (2)$$

Hàm số mạch tương ứng:

$$H(j\omega) = \frac{V}{R+j\omega L} \qquad (3)$$

Đáp ứng ép:

$$i_1(t) = \frac{V}{j\omega L + R} e^{j\omega t} \qquad (4)$$

Hay $i_1(t) = \dfrac{V}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} e^{j(\omega t - \tan^{-1}\frac{\omega L}{R})}$

Phần thực: $\mathrm{Re}[i_1(t)] = \dfrac{V}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} \cos(\omega t - \tan^{-1}\dfrac{\omega L}{R})$

So sánh với kết quả trước đây: Re[i_1(t)]=i(t)

Thật vậy, lấy phần thực của phương trình (2)

$$\mathrm{Re}\left[L\frac{di_1(t)}{dt} + Ri_1(t)\right] = \mathrm{Re}[v_1]$$

$$L\frac{d\mathrm{Re}[i_1(t)]}{dt} + R.\mathrm{Re}[i_1(t)] = \mathrm{Re}[v_1(t)]$$

Thay Re[i_1(t)]=i(t) và Re[v_1(t)]= Vcosωt

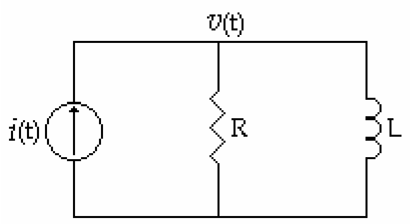
$$\Rightarrow \quad L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = V\cos\omega t$$

Như vậy:

Re[i_1(t)] chính là đáp ứng của mạch với kích thích là Re[v_1(t)]=Re[V$e^{j\omega t}$]=Vcosωt

Thí dụ 6.2

Xác định v(t) của mạch (H 6.3), cho nguồn kích thích i(t)=Isin(ωt+Φ)



(H 6.3)

Viết KCL cho mạch

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L}\int v\,dt = I\sin(\omega t + \Phi)$$

Lấy đạo hàm 2 vế:

$$\frac{1}{R}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{L}v = \omega I\cos(\omega t + \Phi)$$

Tìm đáp ứng v_1 đối với kích thích ω$Ie^{j(\omega t+\Phi)}$=ω$Ie^{j\Phi}e^{j\omega t}$

Hàm số mạch

$$H(j\omega) = \frac{\omega I e^{j\Phi}}{j\omega/R + 1/L} = \frac{\omega LRI e^{j\Phi}}{R + j\omega L}$$

$$v_1(t) = \frac{\omega LRI e^{j\Phi}}{R + j\omega L} e^{j\omega t}$$

$$v_1(t) = \frac{\omega LRI}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} e^{j(\omega t + \Phi - \tan^{-1}\frac{\omega L}{R})}$$

v(t)=Re[v_1(t)]= $\dfrac{\omega LRI}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos(\omega t + \Phi - \tan^{-1}\omega L/R)$

6.3 VECTƠ PHA

Một hàm sin v(t)=Vcos(ωt+θ) có thể được xác định hoàn toàn khi biết V, ω và θ. Nếu xem ω là thông số thì chỉ cần V và θ. Như vậy ta chỉ cần thay v(t)=Vcos(ωt+θ) bằng một số phức có suất là V và đối số là θ

$v(t)=V\cos(\omega t+\theta) \rightarrow \mathbf{V}=Ve^{j\theta} = V\angle\theta$

Số phức **V** dùng để thay cho hàm v(t) trong các phương trình mạch điện, gọi là **vectơ pha** tương ứng của v(t)

Thí dụ hàm $v(t)=10\cos(4t+30^o)$ được biểu diễn bởi vectơ pha $\mathbf{V} = 10\angle 30^o$

✻ Các phép tính đạo hàm và tích phân trên vectơ pha:

$\mathbf{V} = Ve^{j\theta} = V\angle\theta$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{V}}{dt} = j\omega\mathbf{V} = \omega V\angle\theta + 90^o \qquad (6.13)$$

$$\int \mathbf{V}dt = \frac{1}{j\omega}\mathbf{V} = \frac{V}{\omega}\angle\theta - 90^o \qquad (6.14)$$

Giải lại **Thí dụ 6.1** bằng cách dùng vectơ pha

Phương trình mạch điện

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = V\cos\omega t \qquad (1)$$

Viết lại phương trình (1) dưới dạng vectơ pha:

$$L\frac{d\mathbf{I}}{dt} + R\mathbf{I} = \mathbf{V} \qquad (2)$$

Với $\mathbf{V}= V\angle 0^o$

và $\mathbf{I}= I\angle\theta$

Thay $\frac{d\mathbf{I}}{dt} = j\omega\mathbf{I}$ vào (2)

$$\Rightarrow \quad j\omega L\,\mathbf{I} + R\,\mathbf{I} = \mathbf{V} \qquad (3)$$

Phương trình (3) cho:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{R + j\omega L} = \frac{V\angle 0^o}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}\angle\tan^{-1}(\omega L/R)}$$

Hay

$$\mathbf{I} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\angle - \tan^{-1}(\omega L/R) \qquad (4)$$

Hàm i(t) tương ứng của vectơ pha **I** là:

$$i(t) = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\cos[\omega t - \tan^{-1}(\omega L/R)] \qquad (5)$$

Giải lại **Thí dụ 6.2** bằng vectơ pha:

Viết lại phương trình mạch điện (H 6.3)

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L}\int v dt = i(t) = I\sin(\omega t + \Phi) \qquad (1)$$

$i(t)=I\sin(\omega t+\Phi)=I\cos(\omega t+\Phi-90^o) \rightarrow \mathbf{I} = I\angle\Phi-90^o$

Thay v và i bằng các vectơ pha tương ứng:

$$\frac{\mathbf{V}}{R}+\frac{\mathbf{V}}{j\omega L}=\mathbf{I} \qquad (2)$$

Hay $$\frac{R+j\omega L}{jR\omega L}\mathbf{V}=\mathbf{I} \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{V}=\frac{jR\omega L\mathbf{I}}{R+j\omega L}$$

Số phức tương ứng:

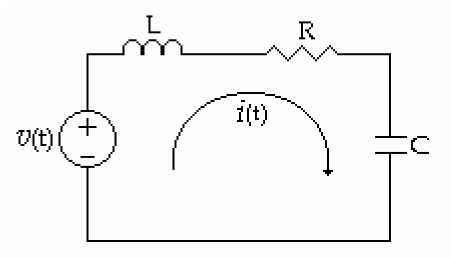
$$V=\frac{\omega LRI}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\angle\Phi-90^o-\tan^{-1}(\omega L/R)\ +90^o \qquad (4)$$

Và đáp ứng của bài toán:

$$v(t)=\frac{\omega LRI}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos[\omega t+\Phi-\tan^{-1}(\omega L/R)] \qquad (5)$$

Thí dụ 6.3

Cho mạch (H 6.4) với $v(t)=V\cos(\omega t+\theta)$, xác định dòng $i(t)$



(H 6.4)

Ta có thể dùng hàm số mạch kết hợp với vectơ pha để giải bài toán

Phương trình mạch điện:

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=\frac{dv}{dt} \qquad (1)$$

Hàm số mạch:

$$H(s)=\frac{s}{Ls^2+Rs+1/C}=\frac{1}{Ls+R+1/sC} \qquad (2)$$

Thay s=jω ta được hàm số mạch ở trạng thái thường trực

$$H(j\omega)=\frac{1}{R+j(\omega L-1/\omega C)} \qquad (3)$$

Đổi sang dạng cực

$$H(j\omega)=\frac{1}{\sqrt{R^2+(\omega L-1/\omega C)^2}}\angle-\tan^{-1}\frac{\omega L-1/\omega C}{R} \qquad (4)$$

Vectơ pha dòng điện **I** xác định bởi

$$\mathbf{I}=H(j\omega).\ \mathbf{V} \qquad (5)$$

và có dạng

$$\mathbf{I}=I\angle\Phi \qquad (6)$$

Với $$I=|H(j\omega)|.V=\frac{V}{\sqrt{R^2+(\omega L-1/\omega C)^2}} \qquad (7)$$

Và $$\Phi=\theta-\tan^{-1}\frac{\omega L-1/\omega C}{R} \qquad (8)$$

Kết quả đáp ứng của mạch là:

trực AC -

$$i(t) = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \cos[\omega t + \theta - \tan^{-1}\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}] \qquad (9)$$

6.4 HỆ THỨC V-I CỦA CÁC PHẦN TỬ R, L, C

Xét phần tử lưỡng cực, có hiệu thế hai đầu là $v(t)$ và dòng điện qua nó là $i(t)$

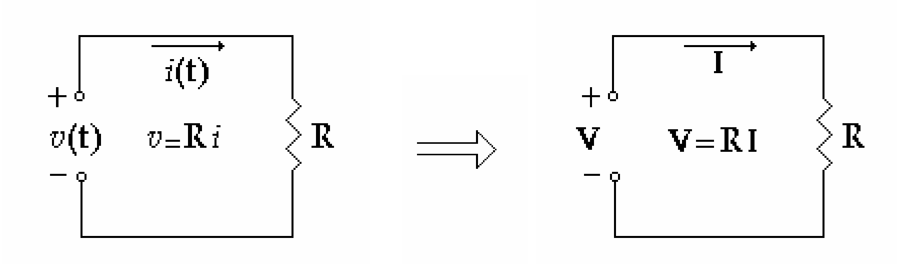
* $v(t)=V\cos(\omega t+\theta)$ là phần thực của $Ve^{(j\omega t+\theta)}$, vectơ pha tương ứng $\mathbf{V} = V\angle\theta$
* $i(t)=I\cos(\omega t+\Phi)$ là phần thực của $Ie^{(j\omega t+\Phi)}$, vectơ pha tương ứng $\mathbf{I} = I\angle\Phi$

Dùng vectơ pha các hệ thức **V-I** của các phần tử xác định như sau:

✳ **Điện trở**

Hệ thức $v(t)=Ri(t)$ ⇒ $\mathbf{V} = R\,\mathbf{I}$

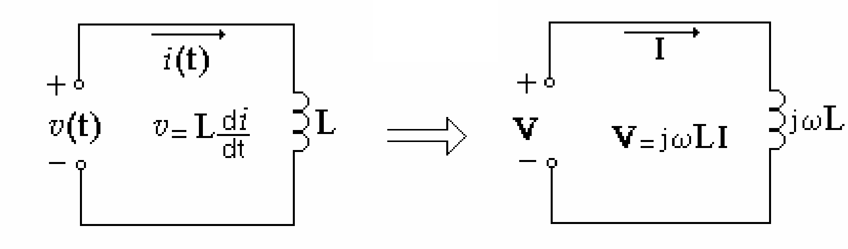
R là số thực nên **V** và **I** cùng pha $\theta=\Phi$



(H 6.5)

✳ **Cuộn dây**

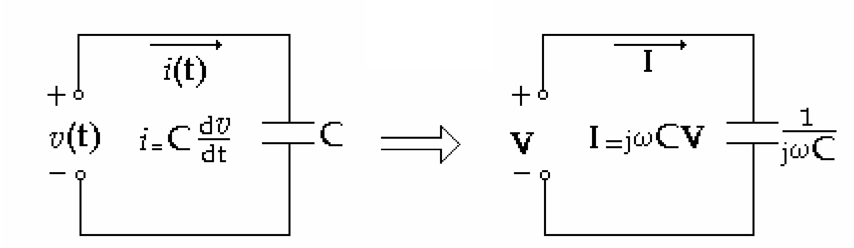
Hệ thức $v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$ ⇒ $\mathbf{V} = j\omega L\,\mathbf{I}$ ⇒ $V=\omega LI$ & $\theta=\Phi+90^o$



(H 6.6)

✳ **Tụ điện**

Hệ thức $i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$ ⇒ $\mathbf{I} = j\omega C\,\mathbf{V}$ ⇒ $I=\omega CV$ & $\theta=\Phi-90^o$



(H 6.7)

6.5 TỔNG TRỞ VÀ TỔNG DẪN PHỨC

6.5.1 Tổng trở và tổng dẫn phức

Đối với mỗi phần tử thụ động trong mạch với nguồn kích thích hình sin, tỉ số **V** / **I** là một hằng số. Vậy ta có thể định nghĩa tổng trở phức của một phần tử là

$\mathbf{Z}=\dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}}$ trong đó $\mathbf{V}=V\angle\theta$ và $\mathbf{I}=I\angle\Phi$

$Z=|Z|\angle\theta_Z=\left|\dfrac{V}{I}\right|\angle\theta-\Phi$

Điện trở $\mathbf{Z}_R=R$

Cuộn dây $\mathbf{Z}_L= j\omega L=\omega L\angle 90^o$,

Tụ điện $\mathbf{Z}_C= -j/\omega C=1/\omega C\angle -90^o$

Tổng dẫn phức:

$\mathbf{Y}=\dfrac{1}{\mathbf{Z}}=\dfrac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}}$

Dưới dạng chữ nhật

$Z=R+jX$ và $Y=G+jB$

R: Điện trở (Resistance) X: Điện kháng (Reactance)

G: Điện dẫn (Conductance) B: Điện nạp (Susceptance)

Mặc dù $Y=1/Z$ nhưng $R\neq 1/G$ và $X\neq 1/B$

Liên hệ giữa R, X, G, B xác định bởi:

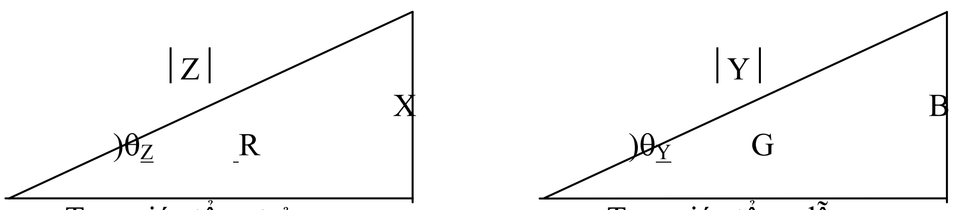
$$Y=\frac{1}{R+jX}=\frac{R-jX}{R^2+X^2}\quad G=\frac{R}{R^2+X^2}\quad B=-\frac{X}{R^2+X^2}$$

$$R=\frac{G}{G^2+B^2}\quad X=-\frac{B}{G^2+B^2}$$

Viết dưới dạng cực

$Z=R+jX=\sqrt{R^2+X^2}\angle\tan^{-1}(X/R)=Z\angle\theta_Z$

$Y=G+jB=\sqrt{G^2+B^2}\angle\tan^{-1}(B/G)=Y\angle\theta_Y$



Tam giác tổng trở Tam giác tổng dẫn

(H 6.8)

6.5.2 Định luật Kirchhoff

Với khái niệm tổng trở và tổng dẫn phức, hai định luật Kirchhoff KCL và KVL áp dụng được cho mạch với kích thích hình sin ở bất cứ thời điểm nào.

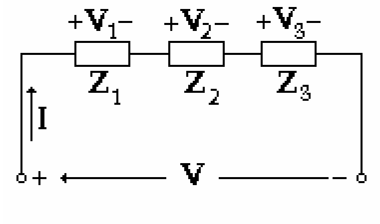
$$\sum_K \mathbf{I}_K=0$$

$$\sum_K \mathbf{V}_K=0$$

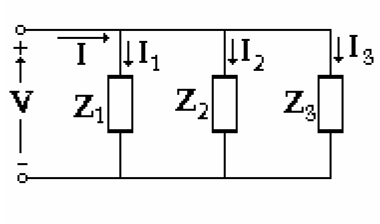
trực AC -

Từ các kết quả có được ta có thể thay một mạch với nguồn kích thích hình sin bằng một mạch với **nguồn được viết dưới dạng vectơ pha** cùng **các thành phần là các tổng trở phức** tương ứng của chúng. Ta được mạch tương đương trong lãnh vực tần số.

6.5.3 Tổng trở nối tiếp và tổng trở song song



(H 6.9)



(H 6.10)

Xét một mạch với các phần tử thụ động mắc nối tiếp (H 6.9), trong đó

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}}, \quad \mathbf{Z}_2 = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}}, \quad \mathbf{Z}_3 = \frac{\mathbf{V}_3}{\mathbf{I}}$$

Ta có $\mathbf{V}_1 = \mathbf{Z}_1\mathbf{I}$, $\mathbf{V}_2 = \mathbf{Z}_2\mathbf{I}$, $\mathbf{V}_3 = \mathbf{Z}_3\mathbf{I}$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 = (\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3)\mathbf{I}$$

Suy ra tổng trở tương đương

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3$$

Trường hợp nhiều phần tử mắc song song (H 6.10)

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{Y}_1\mathbf{V}, \mathbf{I}_2 = \mathbf{Y}_2\mathbf{V}, \mathbf{I}_3 = \mathbf{Y}_3\mathbf{V}$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 = (\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3)\mathbf{V}$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}\mathbf{V}$$

Suy ra tổng dẫn tương đương

$$\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3$$

Hay $\dfrac{1}{\mathbf{Z}} = \dfrac{1}{\mathbf{Z}_1} + \dfrac{1}{\mathbf{Z}_2} + \dfrac{1}{\mathbf{Z}_3}$

Thí dụ 6.4

Giải lại mạch ở **thí dụ 6.3** bằng cách dùng khái niệm tổng trở phức

Vectơ pha biểu diễn nguồn hiệu thế:

$\mathbf{V} = V\angle\theta$ (1)

Tổng trở mạch RLC mắc nối tiếp:

$Z = R + j\omega L + 1/j\omega C = R + j(\omega L - 1/\omega C)$ (2)

$Z = |Z|\angle\theta_{\underline{Z}}$ (3)

$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$ (4)

$\theta_{\underline{Z}} = \tan^{-1}\dfrac{\omega L - 1/\omega C}{R}$ (5)

Vectơ pha biểu diễn dòng điện:

$\mathbf{I} = \dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = I\angle\Phi = |I|\angle\theta - \theta_{\underline{Z}}$ (6)

Trong đó

trực AC -

$$|I| = \frac{|V|}{|Z|} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \qquad (7)$$

$$\Phi = \theta - \theta_Z = \theta - \tan^{-1}\frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \qquad (8)$$

Kết quả đáp ứng của mạch là:

$$i(t) = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}\cos(\omega t + \theta - \tan^{-1}\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}) \qquad (9)$$

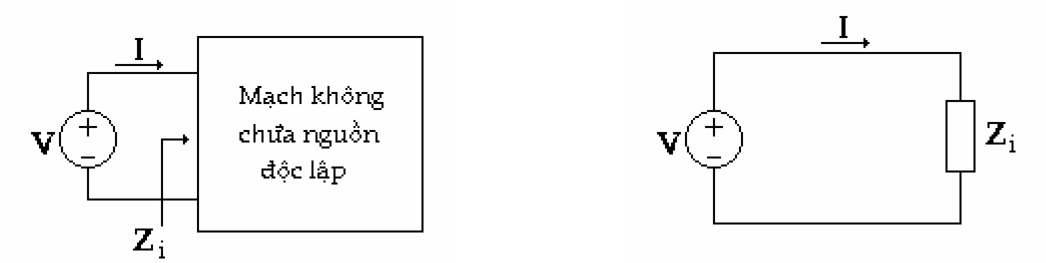
6.5.4 Tổng trở và tổng dẫn vào

Ở chương 2 ta đã thấy một lưỡng cực chỉ gồm điện trở và nguồn phụ thuộc có thể được thay thế bởi một điện trở tương đương duy nhất.

Tương tự, đối với mạch ở trạng thái thường trực AC, một lưỡng cực trong lãnh vực tần số chỉ gồm tổng trở và nguồn phụ thuộc có thể thay thế bởi một tổng trở tương đương duy nhất, gọi là tổng trở vào.

Tổng trở vào là tỉ số của vectơ pha hiệu thế đặt vào lưỡng cực và vectơ pha dòng điện chạy vào mạch.

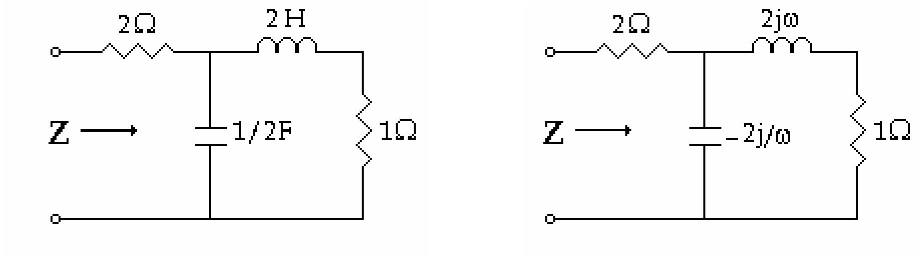
$$\mathbf{Z_i} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}}$$



(H 6.11)

Thí dụ 6.5

Tìm tổng trở vào của mạch (H 6.12a)



(a) (H 6.12) (b)

Mạch tương đương trong lãnh vực tần số (H 6.12b)

Dùng qui tắc xác định tổng trở nối tiếp và song song

$$Z = 2 + \frac{(1 + j2\omega)(-j2/\omega)}{1 + j2\omega - j2/\omega}$$

$$= 2 + \frac{4\omega - j2}{\omega + j2(\omega^2 - 1)} \qquad (1)$$

Nhân số hạng thứ 2 của (1) với lượng liên hiệp của mẫu số

trực AC -

$$Z = 2 + \frac{4 + j(-8\omega^3 + 6\omega)}{\omega^2 + 4(\omega^2 - 1)^2}$$

$$Z = \frac{8\omega^4 - 14\omega^2 + 12}{\omega^2 + 4(\omega^2 - 1)^2} + j\frac{\omega(-8\omega^2 + 6)}{\omega^2 + 4(\omega^2 - 1)^2} = R + jX \qquad (2)$$

Từ kết quả ta nhận thấy:

- R luôn luôn dương
- X thay đổi theo ω

* $\omega < \frac{\sqrt{3}}{2}$, X >0 Mạch có tính điện cảm

* $\omega > \frac{\sqrt{3}}{2}$, X<0, Mạch có tính điện dung

* $\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$, X=0, Mạch là điện trở thuần Z = R = 6Ω

6.6 PHƯƠNG PHÁP GIẢI MẠCH VỚI TÍN HIỆU VÀO HÌNH SIN

Bằng cách dùng số phức hoặc vectơ pha thay cho các lượng hình sin, chúng ta đã thay các phương trình vi tích phân bởi các phương trình đại số. Điều này cho phép ta giải các mạch hình sin giống như các mạch chỉ gồm điện trở với nguồn DC.

Nói cách khác , các kết quả mà ta đã đạt được ở chương 2 và 3 có thể áp dụng vào mạch hình sin sau khi thay các mạch này bởi mạch tương đương của chúng trong lãnh vực tần số.

Như vậy, phương pháp tổng quát để giải mạch hình sin có thể tóm tắt như sau:

* Chuyển mạch ở lãnh vực thời gian sang mạch ở lãnh vực tần số.

* Dùng các Định luật Ohm, Kirchoff, các Định lý mạch điện (Thevenin, Norton,...) và các phương trình nút, vòng để viết phương trình ở lãnh vực tần số.

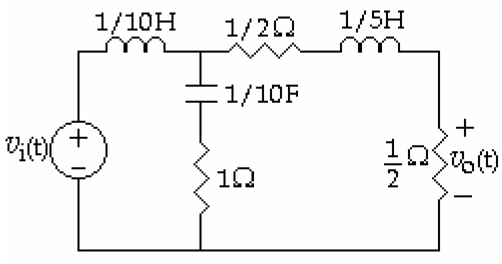
* Giải các phương trình, ta được đáp ứng ở lãnh vực tần số.

* Chuyển kết quả sang lãnh vực thời gian.

Thí dụ 6.6

Xác định tín hiệu ra $v_o(t)$ ở trạng thái thường trực của mạch (H 6.13).

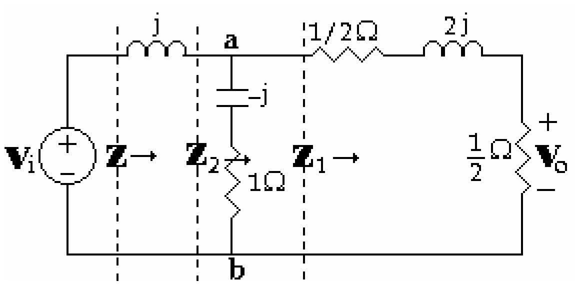
Cho $v_i(t)=10\cos(10t+20^o)$



(H 6.13)

⁕ **Phương pháp 1**: Tính tổng trở tương đương (H 6.14)

$\mathbf{Z}_1$=1/2+j2+1/2=1+j2



$$\mathbf{Z}_2=\frac{(1-j)(1+j2)}{(1-j)+(1+j2)}=1{,}414\angle-8^\circ=1{,}40-j0{,}20\quad \mathbf{Z}=j+(1{,}40-j0{,}20)=1{,}40+j0{,}80=1{,}61\angle 29{,}7^\circ$$

$$\mathbf{I}_1=\frac{\mathbf{V}_i}{\mathbf{Z}}=\frac{10\angle 20^\circ}{1{,}61\angle 29{,}7^\circ}=6{,}21\angle-9{,}7^\circ$$

$$\mathbf{V}_a=\mathbf{Z}_2.\mathbf{I}_1=(1{,}14\angle-8^\circ)(6{,}21\angle-9{,}7^\circ)$$
$$=8{,}75\angle-17{,}7^\circ$$

$\mathbf{V}_o$ xác định bởi cầu phân thế: $\mathbf{V}_o=\dfrac{0{,}5}{1+j2}(8{,}75\angle-17{,}7^\circ)=1{,}96\angle-81{,}3^\circ$

Chuyển kết quả sang lãnh vực thời gian: $\boldsymbol{v_o(t)=1{,}96\cos(10t-81{,}3^o)}$ **(V)**

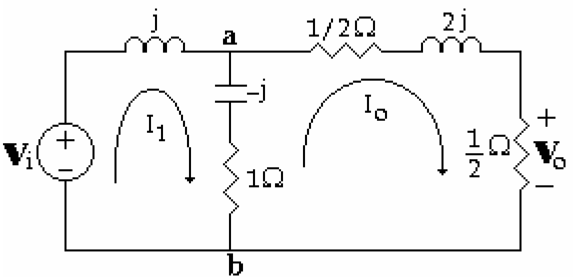
✳ **Phương pháp 2**: Dùng phương trình nút

Phương trình cho nút a (H 6.14): $\dfrac{\mathbf{V}_a-10\angle 20^\circ}{j}+\dfrac{\mathbf{V}_a}{1-j}+\dfrac{\mathbf{V}_a}{1/2+j2+1/2}=0$

Suy ra $\mathbf{V}_a=8{,}75\angle-17{,}7^\circ$

Và $\mathbf{V}_o=(\dfrac{0{,}5}{1+j2})\mathbf{V}_a=1{,}96\angle-81{,}3^\circ$

✳ **Phương pháp 3**: Dùng phương trình vòng (H 6.15)



Phương trình vòng cho hai mắt lưới:

$$\mathbf{I}_1-(1-j)\mathbf{I}_0=10\angle 20^\circ$$
$$-(1-j)\mathbf{I}_1+(2+j)\mathbf{I}_0=0$$

Giải hệ thống phương trình, ta được

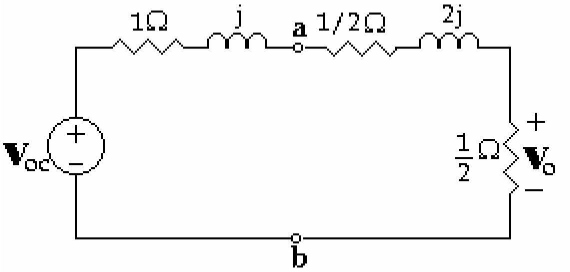
$$\mathbf{I}_a=3{,}92\angle-81{,}3^\circ$$
$$\mathbf{V}_a=\frac{\mathbf{I}_a}{\mathbf{2}}=1{,}96\angle-81{,}3^\circ$$

✳ **Phương pháp 4**: Dùng Định lý Thevenin

Thay phần mạch bên trái ab bằng mạch tương đương Thevenin

$\mathbf{V}_{oc}$ được tính từ cầu phân thế: $\mathbf{V}_{oc}=10\angle 20^\circ\dfrac{1-j}{1-j+j}=14{,}14\angle-25^\circ$

Tổng trở tương đương của mạch nhìn từ ab khi nối tắt nguồn $\mathbf{V}_i$: $\mathbf{Z}_{th}=\dfrac{(1-j)j}{1-j+j}=1+j$



(H 6.16)

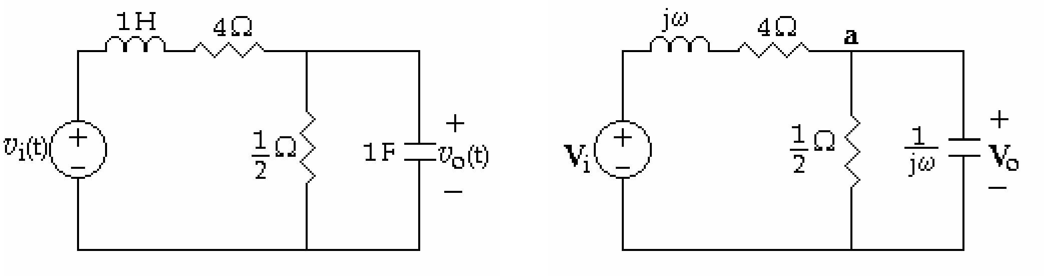
Mạch tương đương Thevenin (H 6.16)

$\mathbf{V}_o$ xác định từ cầu phân thế

$$\mathbf{V}_o=14{,}14\angle-25^\circ\frac{0{,}5}{1+j+1+j2}$$
$$=14{,}14\angle-25^\circ\frac{0{,}5}{2+j3}$$
$$\mathbf{V}_o=1{,}96\angle-81{,}3^\circ$$

6.7 MẠCH KÍCH THÍCH BỞI NHIỀU NGUỒN CÓ TẦN SỐ KHÁC NHAU

Tìm tín hiệu ra $v_o(t)$ của mạch (H 6.17a). Cho $v_i(t)$=3+10cost+3cos(3t+30^o)



(a) (H 6.17) (b)

Xem nguồn kích thích gồm 3 thành phần, áp dụng định lý chồng chất để xác định đáp ứng thường trực đối với mỗi thành phần của kích thích.
Kết quả cuối cùng sẽ là tổng hợp tất cả các đáp ứng.

⁕ Đối với thành phần DC: $v_{i1}(t)$=3 V.
Xem mạch đạt trạng thái thường trực (tụ hở và cuộn dây nối tắt),

⇒ $v_{o1}(t)=\dfrac{1/2}{4+1/2}v_{i1}=\dfrac{1/2}{4+1/2}3=\dfrac{1}{3}$

⁕ Đối với các thành phần hình sin, vẽ lại mạch ở lãnh vực tần số (H 6.17b)
Viết phương trình nút tại a

$$\frac{\mathbf{V}_a-\mathbf{V}_1}{4+j\omega}+\frac{\mathbf{V}_a}{1/2}+\frac{\mathbf{V}_a}{1/j\,\omega}=0\Rightarrow\mathbf{V}_a=\frac{1}{1+(4+j\omega)(2+j\omega)}\mathbf{V}_1=\frac{1}{9-\omega^2+j6\omega}\mathbf{V}_1$$

* Với $v_{i2}(t)$=10cost ⇒$\mathbf{V}_{i2}=10\angle 0°$

$$\mathbf{V}_{a2}=\frac{10\angle 0°}{8+j6}=1\angle-36{,}9°$$

⇒ $v_{o2}(t)$=cos(t-36,9^o) V

* $v_{i3}(t)$= 3cos(3t+30^o)⇒ $\mathbf{V}_{i3}=3\angle 30°$

$$\mathbf{V}_{a3}=\frac{3\angle 30°}{j18}=\frac{1}{6}\angle-60°$$

⇒ $v_{o3}(t)$=(1/6)cos(3t- 60^o) V

Kết quả đáp ứng $v_o(t)$ chính là tổng của các đáp ứng đối với các nguồn kích thích riêng rẽ

$v_o(t)$= $v_{o1}(t)$+$v_{o2}(t)$+$v_{o3}(t)$=1/3+ cos(t-36,9^o)+(1/6)cos(3t - 60^o) V

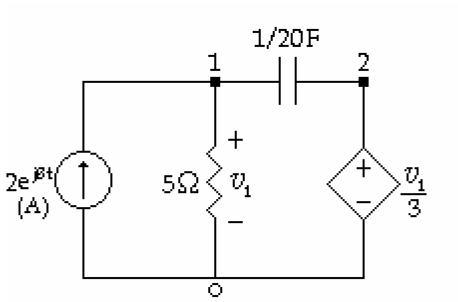
BÀI TẬP

- o ✳ o -

6.1 Cho mạch (H P6.1), tìm đáp ứng v_1 với nguồn $2e^{j8t}$
Dùng kết quả này để xác định đáp ứng v_1 đối với:

a. Nguồn 2cos8t (A)

b. Nguồn 2sin8t (A)

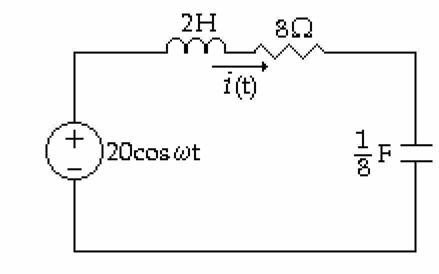


(H P6.1)

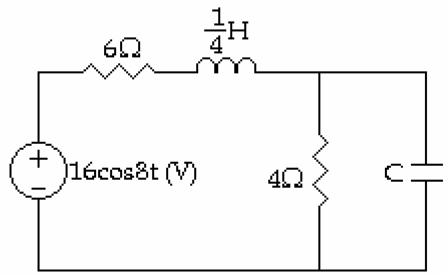
6.2 Tìm dòng điện $i(t)$ ở trạng thái thường trực AC của mạch (H P6.2) trong 2 trường hợp

a. ω=4 rad/s

b. ω= 2 rad/s



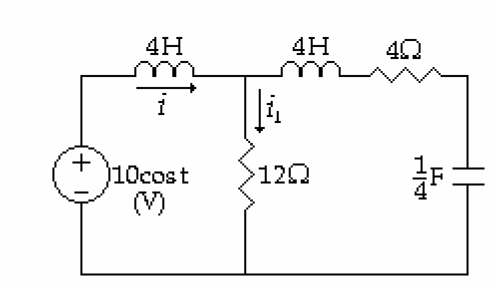
(H P6.2)



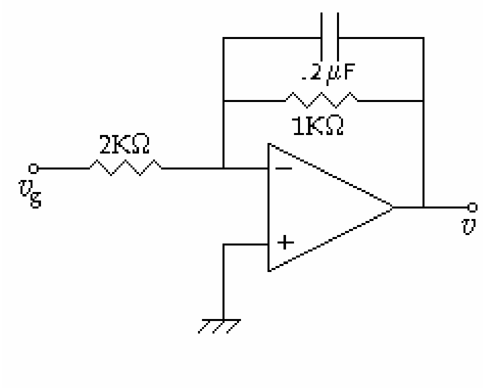
(H P 6.3)

6.3 Mạch (H P6.3). Xác định C sao cho tổng trở nhìn từ nguồn có giá trị thực. Xác định công suất tiêu thụ bởi điện trở 6Ω trong trường hợp này.

6.4 Mạch (H P6.4). Xác định dòng điện i và i_1 ở trạng thái thường trực

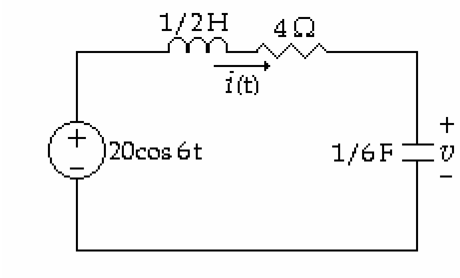


(H P6.4)

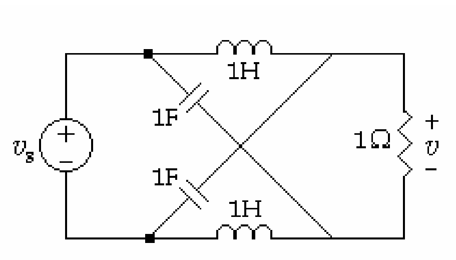


(H P 6.5)

6.5 Mạch (H P6.5). Xác định *v* ở trạng thái thường trực. Cho v_g=10cos10.000t (V)
6.6 Mạch (H P6.6). Xác định đáp ứng đầy đủ của *i* nếu *i*(0)=2A và *v*(0)=6V.



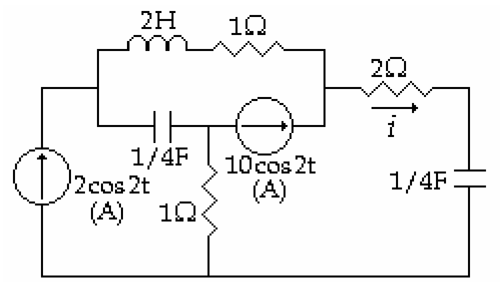
(H P6.6)



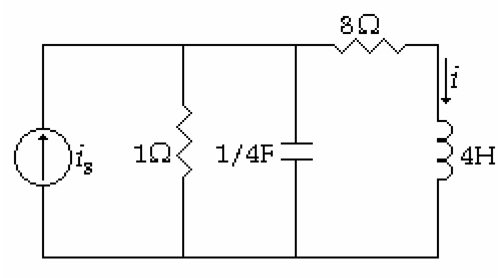
(H P6.7)

6.7 Mạch (H P6.7). Xác định *v* ở trạng thái thường trực. Cho v_g=20cos2t (V)

6.8 Mạch (H P6.8). Xác định *i* ở trạng thái thường trực.



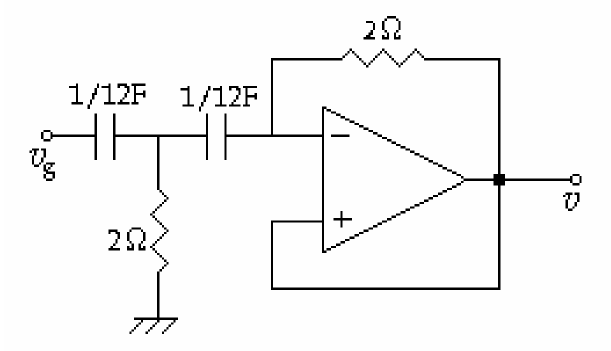
(H P6.8)



(H P6.9)

6.9 Mạch (H P6.9). Xác định *i* ở trạng thái thường trực.
Cho i_g=9-20cost -39cos2t+18cos3t (A)

6.10 Mạch (H P6.10). Xác định *v* ở trạng thái thường trực.
Cho v_g = 5cos3t



(H P6.10)

✷ CHƯƠNG 7

TẦN SỐ PHỨC

✷ **TÍN HIỆU HÌNH SIN CÓ BIÊN ĐỘ THAY ĐỔI THEO HÀM MŨ**
✷ **TẦN SỐ PHỨC**
✷ **TỔNG TRỞ VÀ TỔNG DẪN**
✷ **HÀM SỐ MẠCH**
♦ Cực và Zero của hàm số mạch
♦ Xác định đáp ứng tự nhiên nhờ hàm số mạch
♦ Hàm số ngã vào và hàm số truyền

Chương này xét đến đáp ứng ép của mạch với kích thích là tín hiệu hình sin có biên độ thay đổi theo hàm mũ. Các tín hiệu đã đề cập đến trước đây (DC, sin, mũ . . .) thật ra là các trường hợp đặc biệt của tín hiệu này, vì vậy, đây là bài toán tổng quát nhất và kết quả có thể được áp dụng để giải các bài toán với các tín hiệu vào khác nhau.

Chúng ta cũng sẽ nghiên cứu kỹ hơn về hàm số mạch, nhờ khái niệm cực và zero, để thấy vai trò quan trọng của nó trong việc xác định đáp ứng của mạch.

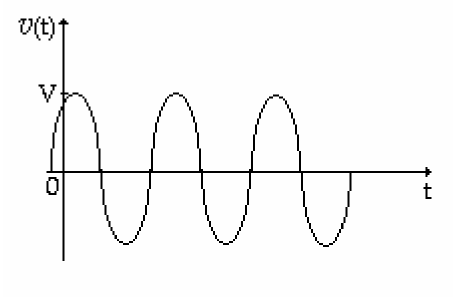
7.1 TÍN HIỆU HÌNH SIN CÓ BIÊN ĐỘ THAY ĐỔI THEO HÀM MŨ

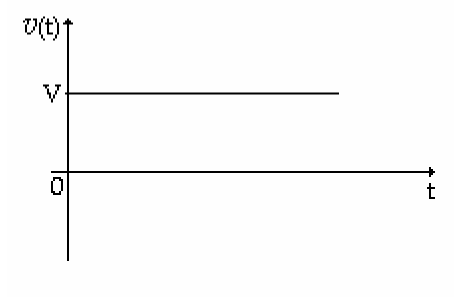
Tín hiệu xác định bởi

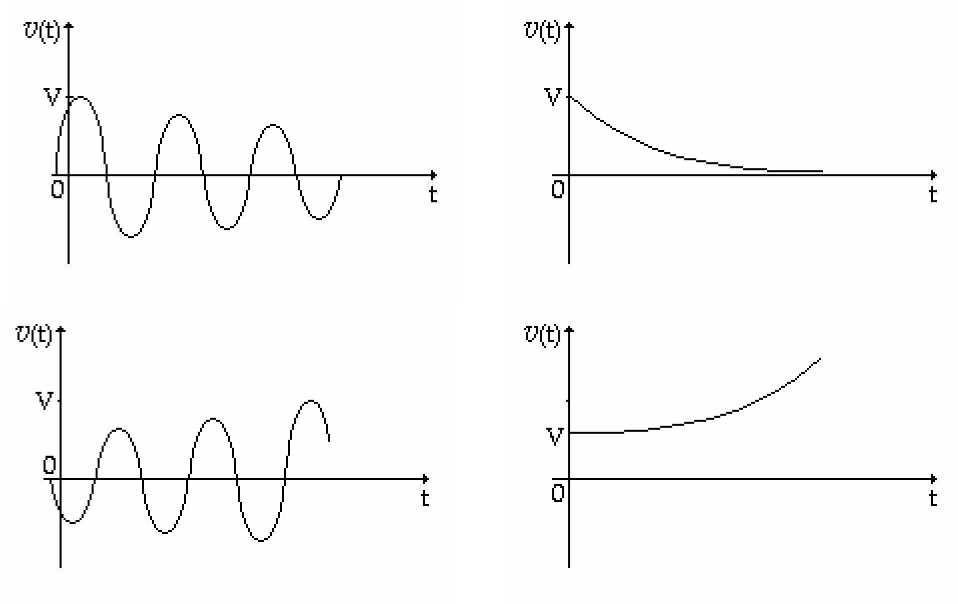
$v(t)= Ve^{\sigma t}\cos(\omega t+\phi)$ (7.1)

Đây là tích của hàm sin $V\cos(\omega t+\phi)$ và hàm mũ $e^{\sigma t}$. σ là số thực, có thể dương hoặc âm. Tùy theo giá trị của ω và σ, ta có các trường hợp sau:

* $\sigma=0, \omega=0$ $v(t) = V\cos\phi = V_O$ là tín hiệu DC
* $\sigma=0, \omega\neq 0$ $v(t) = V\cos(\omega t+\phi)$ là tín hiệu hình sin có biên độ không đổi
* $\sigma<0, \omega\neq 0$ $v(t) = Ve^{\sigma t}\cos(\omega t+\phi)$ là tín hiệu hình sin có biên độ giảm dần
* $\sigma>0, \omega\neq 0$ $v(t) = Ve^{\sigma t}\cos(\omega t+\phi)$ là tín hiệu hình sin có biên độ tăng dần
* $\sigma<0, \omega=0$ $v(t) = V_O e^{\sigma t}$ là tín hiệu mũ có biên độ giảm dần
* $\sigma>0, \omega=0$ $v(t) = V_O e^{\sigma t}$ là tín hiệu mũ có biên độ tăng dần





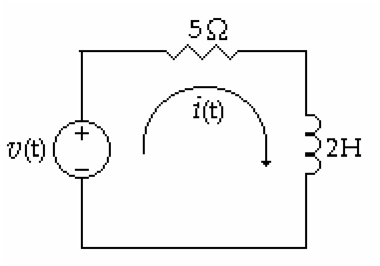


(H 7.1)

Nhắc lại đơn vị của ω là rad/s, ϕ là radian hay độ. σ có đơn vị là 1/s(s^{-1}).
σ có quan hệ với tần số tự nhiên , σt có đơn vị là Neper (Np) và ta gọi σ là tần số Neper với đơn vị Np/s.

Thí dụ 7.1

Tìm đáp ứng ép *i*(t) của mạch (H 7.2). Cho *v*(t)=$25e^{-t}$cos2t



Phương trình mạch điện

$$2\frac{di}{dt}+5i=25e^{-t}\cos 2t \qquad (1)$$

Đáp ứng ép *i*(t) có dạng

i(t)= e^{-t}(Acos2t+Bsin2t) (2)

Lấy đạo hàm (2) thay vào (1)

(3A+4B)e^{-t}cos2t+(-4A+3B) e^{-t}sin2t=25e^{-t}cos2t

⇒ 3A+4B=25 (3)

-4A+3B=0 (4)

Giải (3) và (4) được A=3 và B=4

Vậy *i*(t)= e^{-t}(3cos2t+4sin2t)

Hay *i*(t)= 5e^{-t}(cos2t-53,1^o)

Như vậy đáp ứng ép đối với tín hiệu hình sin có biên độ giảm dần cũng là tín hiệu hình sin có biên độ giảm dần.

7.2 TẦN SỐ PHỨC (Complex frequency)

Nhắc lại, trong chương 6, một nguồn hình sin

v(t)= Vcos(ωt+ϕ) (7.2)

Có thể đặc trưng bởi vectơ pha

V=V$e^{j\phi}$=V∠ϕ (7.3)

Thực chất *v*(t) chính là phần thực của **V**$e^{j\omega t}$

v(t) = Vcos(ωt+ϕ)

= Re[V$e^{j\phi}e^{j\omega t}$] (7.4)

Bây giờ xét đến nguồn kích thích

$v(t)= Ve^{\sigma t}\cos(\omega t+\phi)$ (7.5)

Do tính chất và các phép tính trên hàm sin có biên độ thay đổi theo hàm mũ không khác gì với hàm sin nên ta có thể mở rộng khái niệm vectơ pha cho trường hợp này.

Viết lại (7.5)

$$v(t) = Ve^{\sigma t}\cos(\omega t+\phi) = \mathrm{Re}[Ve^{\sigma t}e^{j(\omega t+\phi)}] = \mathrm{Re}[Ve^{j\phi}e^{(\sigma+j\omega)t}]$$

Nếu chúng ta định nghĩa

$s=\sigma +j\omega$ (7.6)

Ta được

$v(t)= \mathrm{Re}[Ve^{j\phi}e^{st}]=\mathrm{Re}[\mathbf{V}\ e^{st}]$ (7.7)

So sánh (7.7) và (7.4) ta thấy hệ thức (7.7) chính là (7.4) trong đó jω đã được thay thế bởi s=σ +jω. Điều này có thể dẫn đến kết luận: Những gì đã thực hiện được với hàm sin cũng thực hiện được với hàm sin có biên độ thay đổi theo hàm mũ.

Để phân biệt hai trường hợp ta có thể dùng ký hiệu **V**(s) và **V**(jω)

Thí dụ, vectơ pha đặc trưng cho

$v(t)=25e^{-t}\cos 2t$ là $\mathbf{V}(s)=25\angle 0^o$ với $s=\sigma +j\omega=-1+j2$

Do s là một số phức có thứ nguyên là tần số nên được gọi là **tần số phức**.

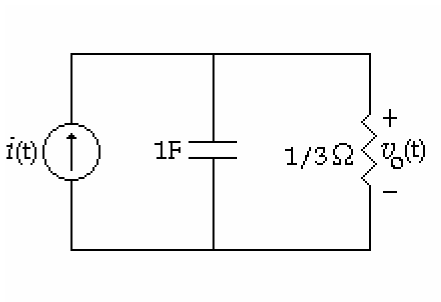
Các thành phần của s là

σ = Re[s] Np/s

ω =Im[s] rad/s

Thí dụ 7.2

Tìm đáp ứng ép $v_O(t)$ của mạch (H 7.3). Cho $i(t)=e^{-t}\cos t$



(H 7.3)

Viết KCL cho mạch

$$\frac{dv_O}{dt}+3v_O=i(t)$$

Thay các vectơ pha tương ứng

$s\mathbf{V}_O(s)+3\mathbf{V}_O(s) = \mathbf{I}(s)$

$$\mathbf{V}_O(s)=\frac{\mathbf{I}(s)}{s+3}$$

Với s=-1+j, $\mathbf{I}(s)=1\angle 0^o$

$$\mathbf{V}_O(s)=\frac{1\angle 0°}{2+j}=\frac{1\angle 0°}{\sqrt{5}\angle 26,5°}$$

$$\mathbf{V}_O(s)=\frac{1}{\sqrt{5}}\angle -26,5° \quad \text{và} \quad v_O(t)=\frac{1}{\sqrt{5}}e^{-t}\cos(t-26,5°)$$

7.3 TỔNG TRỞ VÀ TỔNG DẪN PHỨC

Với các kết quả có được khi mở rộng khái niệm vectơ pha trong đó jω đã được thay thế bởi s=σ +jω, ta có thể mở rộng khái niệm tổng trở và tổng dẫn phức.

Trong lãnh vực tần số phức (gọi tắt là lãnh vực s) Các đại lượng được ký hiệu với chữ s để phân biệt với trường hợp khác

$$\mathbf{Z}(s)=\frac{\mathbf{V}(s)}{\mathbf{I}(s)}$$

Được gọi là tổng trở phức. (hay vắn tắt là tổng trở nếu mạch đã được chuyển sang lãnh vực tần số).

Một cách tổng quát, tổng trở phức của một phần tử có được từ Z(jω) của phần tử này và thay jω bởi s.

] Điện trở $\mathbf{Z}_R=R \Rightarrow \mathbf{Z}_R(s)=R$

] Cuộn dây $\mathbf{Z}_L= j\omega L=\omega L\angle 90^o, \Rightarrow \mathbf{Z}_L(s)= sL$

] Tụ điện $\mathbf{Z}_C= -j/\omega C=1/\omega C\angle -90^o \Rightarrow \mathbf{Z}_C(s)= 1/sC$

Tổng dẫn phức: $\mathbf{Y}(s)=\dfrac{1}{\mathbf{Z}(s)}=\dfrac{\mathbf{I}(s)}{\mathbf{V}(s)}$

] Điện trở $\mathbf{Y}_R(s)=1/R$

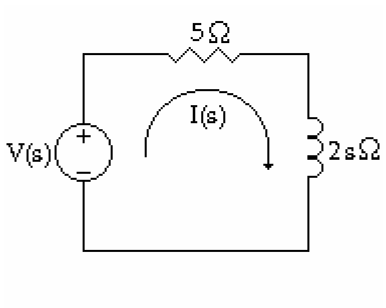
] Cuộn dây $\mathbf{Y}_L(s)= 1/sL$

] Tụ điện $\mathbf{Y}_C(s)= sC$

Đến đây chắc chúng ta thấy ngay một điều hiển nhiên là tất cả các định luật và định lý mạch điện cũng như các phương trình vòng, nút . . . đều áp dụng được trong lãnh vực tần số.

Thí dụ 7.3

Giải lại **Thí dụ 7. 1** bằng cách dùng tổng trở phức.



(H 7.4)

Mạch được vẽ lại trong lãnh vực s (H 7.4)

Ta có $\mathbf{Z}(s)= 5+ 2s$

$\mathbf{V}(s)= 25\angle 0^o$

$$\mathbf{I}(s)=\frac{\mathbf{V}(s)}{\mathbf{Z}(s)}=\frac{25\angle 0^o}{5+2s}$$

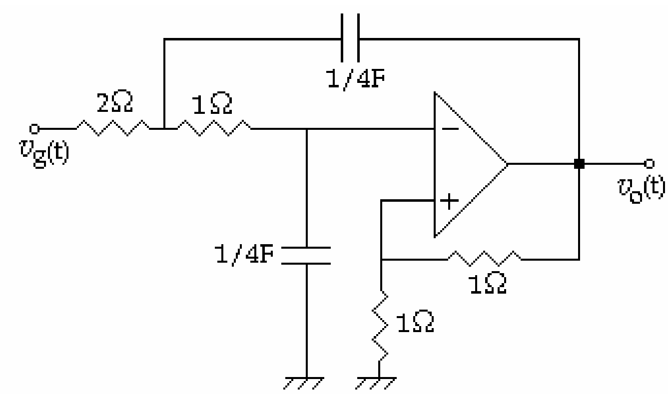
Với s=-1+j2

$$\mathbf{I}(s)=\frac{25\angle 0^o}{5+2(-1+j2)}=\frac{25\angle 0^o}{3+j4}=\frac{25\angle 0^o}{5\angle 53{,}1^o}=5\angle -53{,}1^o$$

suy ra $i(t)= 5e^{-t}(\cos 2t-53{,}1^o)$

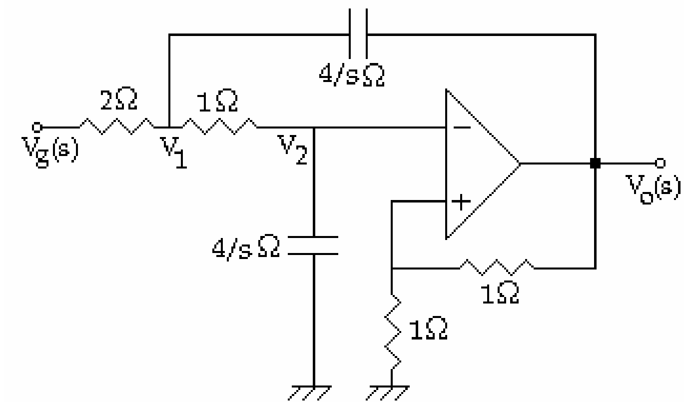
Thí dụ 7.4

Tìm đáp ứng ép $v_O(t)$ của mạch (H 7.5). Cho $v_g(t)=e^{-2t}\cos 4t$ (V)



(H 7.5)

Vẽ lại mạch trong lãnh vực s



(H 7.6)

Viết phương trình nút $\mathbf{V}_1$ và $\mathbf{V}_2$

$$\left(\frac{1}{2}+1+\frac{s}{4}\right)\mathbf{V}_1-\frac{1}{2}\mathbf{V}_g-\mathbf{V}_2-\frac{s}{4}\mathbf{V}_O=0 \qquad (1)$$

$$\left(1+\frac{s}{4}\right)\mathbf{V}_2-\mathbf{V}_1=0 \qquad (2)$$

Giải hệ phương trình

Để ý $\quad \mathbf{V}_2=\dfrac{\mathbf{V}_O}{2} \qquad (3)$

$$\mathbf{V}_O(s)=\frac{16}{s^2+2s+8}\mathbf{V}_g(s) \qquad (4)$$

Với $\quad v_g(t)=e^{-2t}\cos 4t \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V}_g(s)=1\angle 0^o$; $s=-2+j4$

Thay các giá trị này vào (4), sau khi rút gọn:

$$\mathbf{V}_O(s)=\sqrt{2}\angle -135^\circ \quad \Rightarrow \quad v_O(t)=\sqrt{2}\,e^{-2t}(\cos 4t-135^o)$$

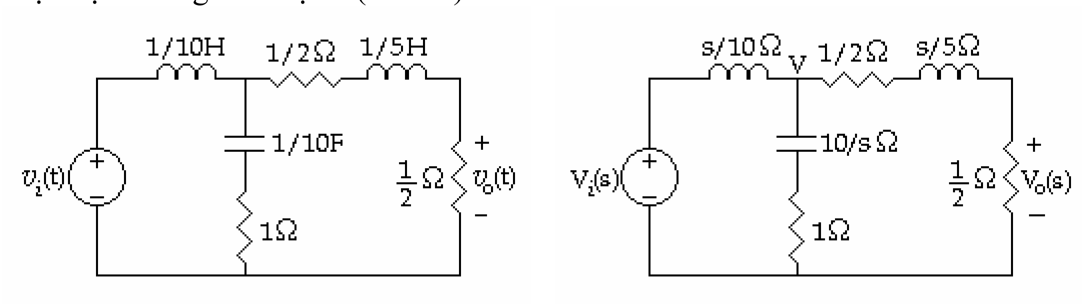
Thí dụ 7.5

Xác định $\mathbf{H}(s)=\dfrac{\mathbf{V}_O(s)}{\mathbf{V}_i(s)}$ của mạch (H 7.7a)

Tìm đáp ứng ép $v_O(t)$ứng với

* $v_i(t)=5e^{-3t}(\cos t-10^o)$ (V)
* $v_i(t)=10(\cos 10t-20^o)$ (V)
* $v_i(t)=10e^{-t}$ (V)
* $v_i(t)=10$ (V)

Vẽ lại mạch trong lãnh vực s (H 7.7b)



(a) (H 7.7) (b)

Vẽ lại mạch trong lãnh vực s (H 7.7b)

Phương trình nút ở V

$$\frac{\mathbf{V}-\mathbf{V}_i}{s/10}+\frac{\mathbf{V}}{1+10/s}+\frac{\mathbf{V}}{1+s/5}=0$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{V}(s)=\frac{10(s+5)(s+10)}{s^3+20s^2+200s+500}\mathbf{V}_i(s)$$

Dùng cầu phân thế

$$\mathbf{V}_O(s)=\frac{1/2}{1+s/5}\mathbf{V}(s)=\frac{25(s+10)}{s^3+20s^2+200s+500}\mathbf{V}_i(s)$$

$$\mathbf{H}(s)=\frac{\mathbf{V}_O(s)}{\mathbf{V}_i(s)}=\frac{25(s+10)}{s^3+20s^2+200s+500}$$

Xét các trường hợp cụ thể:

a. $v_i(t)=5e^{-3t}(\cos t-10^o)$ (V)

$\mathbf{V}_i(s)=5\angle-10^O$ và s=-3+j

Hàm số mạch **H**(s) trở thành

$$\mathbf{H}(-3+j)=\frac{25(-3+j+10)}{(-3+j)^3+20(-3+j)^2+200(-3+j)+500}=1{,}55\angle-60{,}3^o$$

$\mathbf{V}_O(s)=\mathbf{H}(s).\mathbf{V}_i(s)=1{,}55\angle-60{,}3^O.\ 5\angle-10^O=7{,}75\angle-70{,}3^O$

$v_O(t)=7{,}75e^{-3t}(\cos t-70{,}3^o)$ (V)

b. $v_i(t)=10(\cos 10t+20^o)$ (V)

$\mathbf{V}_i(s)=10\angle 20^O$ và s=0+j10

Hàm số mạch **H**(s) trở thành

$$\mathbf{H}(j10)=\frac{25(j10+10)}{(j10)^3+20(j10)^2+200(j10)+500}=0{,}196\angle-101{,}3^o$$

$\mathbf{V}_O(s)=\mathbf{H}(s).\mathbf{V}_i(s)=0{,}196\angle-101{,}3^O.\ 10\angle 20^O=1{,}96\angle-81{,}3^O$

$v_O(t)=1{,}96(\cos 10t-81{,}3^o)$ (V)

c. $v_i(t)=10e^{-t}$ (V)

$\mathbf{V}_i(s)=10$ và s=-1+j0=-1

Hàm số mạch **H**(s) trở thành

$$\mathbf{H}(-1)=\frac{25(-1+10)}{(-1)^3+20(-1)^2+200(-1)+500}=0{,}705$$

$\mathbf{V}_O(s)=\mathbf{H}(s).\mathbf{V}_i(s)=0{,}705.\ 10=7{,}05$

$v_O(t)=7{,}05e^{-t}$ (V)

d. $v_i(t)=10$ (V)

$\mathbf{V}_i(s)=10$ và s=0

Hàm số mạch **H**(s) trở thành

$$\mathbf{H}(0)=\frac{25(0+10)}{(0)^3+20(0)^2+200(0)+500}=0{,}5$$

$\mathbf{V}_O(s)=\mathbf{H}(s).\mathbf{V}_i(s)=0{,}5.\ 10=5$

$v_O(t)=5$ (V)

7.4 HÀM SỐ MẠCH

7.4.1 Cực và Zero của hàm số mạch

Khái niệm hàm số mạch được mở rộng cho lãnh vực tần số và nó vẫn được xác định như trước đây (chương 5)

$$\mathbf{H}(s)=\frac{\mathbf{N}(s)}{\mathbf{D}(s)}=\frac{b_m s^m+.....+b_1 s+b_0}{a_n s^n+.....+a_1 s+a_0}$$

(Xem lại chương 5 cách xác định **N**(s) và **D**(s))

Giả sử phương trình **N**(s)=0 có m nghiệm $z_1, z_2, \ldots z_m$.

và phương trình **D**(s)=0 có n nghiệm $p_1, p_2, \ldots p_n$, H(s) được viết lại

$$\mathbf{H}(s)=K\frac{(s-z_1)(s-z_2).....(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2).....(s-p_n)}$$

$z_1, z_2, \ldots z_m$ được gọi là các Zero của **H**(s)

$p_1, p_2, \ldots p_n$ được gọi là các Cực của **H**(s)

Biểu diễn trên mặt phẳng s, với trục thưc σ và trục ảo jω

Zero được ký hiệu bởi vòng tròn nhỏ **(o)** và Cực bởi dấu **(x)**

Thí dụ 7.6

Vẽ giản đồ Cực và Zero của hàm số mạch

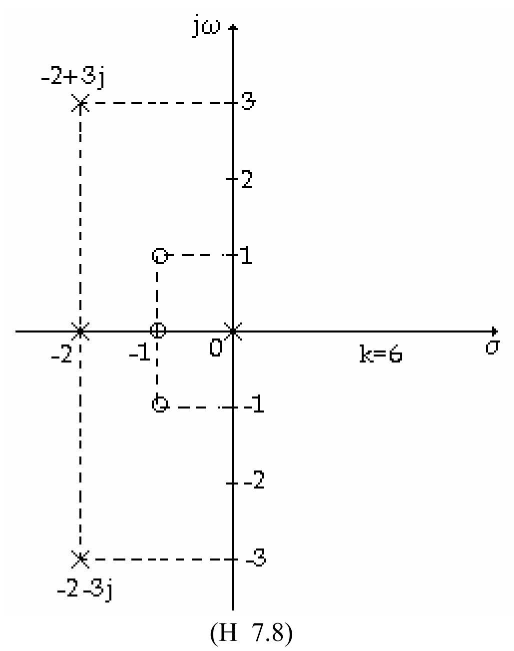
$$\mathbf{H}(s)=\frac{6(s+1)(s^2+2s+2)}{s(s+2)(s^2+4s+13)}$$

Viết lại **H**(s)

$$\mathbf{H}(s)=\frac{6(s+1)(s+1+j)(s+1-j)}{s(s+2)(s+2+j3)(s+2-j3)}$$

Các Zero: **-1, -1-j, -1+j**

và các Cực: **0, -2, -2-j3 và -2+j3**



(H 7.8)

Giản đồ Cực và Zero của **H**(s) (H 7.8)

Vài điểm cần lưu ý về Cực và Zero

* Nếu **N**(s) hoặc **D**(s) có nghiệm lặp lại bậc r, ta nói **H**(s) có Zero hay Cực đa trùng bậc r
* Nếu **N**(s) (hoặc **D**(s)) → 0 khi s→ ∞ ta nói **H**(s) có Zero hay (Cực) ở vô cực.
* Các Zero và Cực ở vô cực không vẽ được trên mp s
* Nếu n>m, **H**(s) có Zero bậc n-m ở vô cực
* Nếu n<m, **H**(s) có Cực bậc m-n ở vô cực
* Kể cả các Zero và Cực ở ∞ thì số Zero và Cực của **H**(s) bằng nhau.

Như vậy, trong thí dụ 7.6 ta phải kể thêm một Zero ở vô cực

Thí dụ 7.7

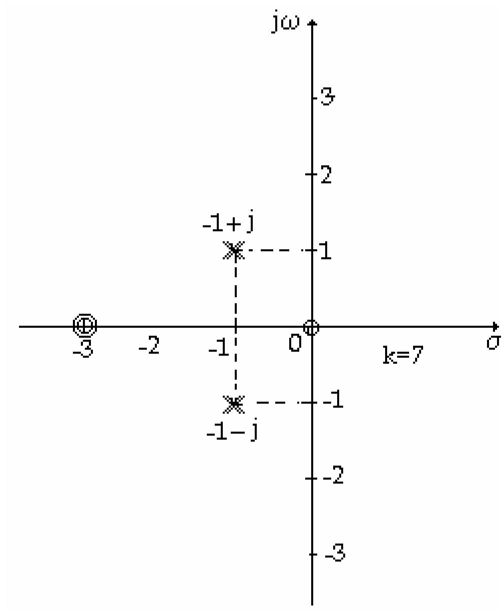
Vẽ giản đồ Cực và Zero của hàm số mạch

$$\mathbf{H}(s)=\frac{7s(s+3)^2}{(s+1-j)^2(s+1+j)^2}$$

Hàm số mạch này có:
* Zero bậc 1 tại **s=0** và Zero bậc 2 **tại s=-3**

* Cực bậc 2 tại **s=-1+j** và **-1-j**

* Ngoài ra khi $s\rightarrow\infty$, **H**(s) =7/s $\rightarrow$ 0 nên **H**(s) có một Zero ở vô cực
Giản đồ Cực và Zero của **H**(s) (H 7.9)



(H 7.9)

7.4.2 Xác định đáp ứng tự nhiên từ hàm số mạch

Nhắc lại, phương trình vi phân tổng quát của mạch điện là:

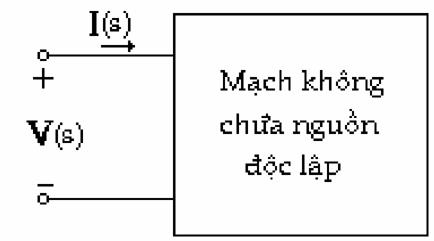
$$a_n\frac{d^ny}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+.............+a_1\frac{dy}{dt}+a_0y=b_m\frac{d^mx}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}+............+b_1\frac{dx}{dt}+b_0x$$

Phương trình đặc trưng tương ứng
$a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+. . . . . + a_1s+a_0=0$ có nghiệm $s_1, s_2,. . . .s_n$
Đáp ứng tự nhiên $y_n(t)=k_1e^{s_1t}+k_2e^{s_2t}.....+k_ne^{s_nt}$

* Nghiệm của phương trình đặc trưng chính là nghiệm của **D**(s)=0, chính là các Cực của **H**(s) (Kể cả các cực đã đơn giản với Zero, nếu có)
* Vậy **khi biết Cực của H(s)** ta có ngay dạng của **đáp ứng tự nhiên**.
Và tính chất của đáp ứng tự nhiên có thể được phát biểu dựa trên vị trí của các Cực của **H**(s) trên mặt phẳng phức.

7.4.3 Hàm ngã vào và hàm truyền (Driving point & Transfer function)

7.4.3.1 Hàm ngã vào



(H 7.10)

Xét một lưỡng cực (H 7.10)
Nếu kích thích là nguồn dòng điện thì đáp ứng là hiệu thế và Hàm ngã vào là tổng trở **Z**(s)

phức -

$$\mathbf{Z}(s)=\frac{\mathbf{V}(s)}{\mathbf{I}(s)}$$

Nếu kích thích là nguồn hiệu thế thì đáp ứng là dòng điện và Hàm ngã vào là tổng dẫn **Y**(s).

$$\mathbf{Y}(s)=\frac{1}{\mathbf{Z}(s)}=\frac{\mathbf{I}(s)}{\mathbf{V}(s)}$$

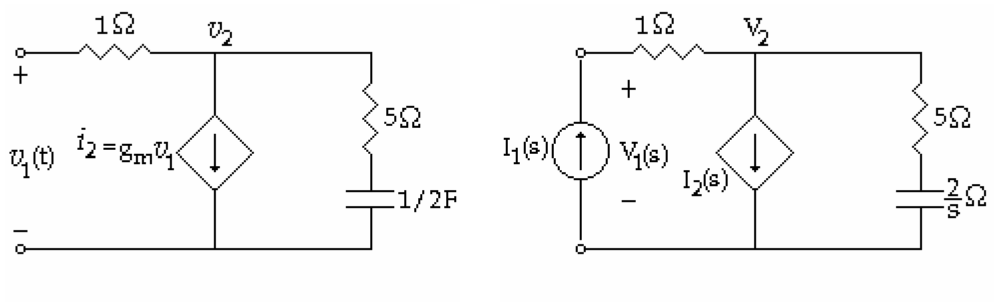
* Đối với một lưỡng cực, **Z**(s)=1/**Y**(s) nên Cực của hàm này là Zero của hàm kia nên đáp ứng tự nhiên có thể xác định bởi Cực hay Zero.

* Một mạch không chứa nguồn phụ thuộc thì luôn luôn ổn đinh nên Cực (hoặc Zero) của **Z**(s) nằm ở 1/2 mp trái hở và chỉ những Cực bậc nhất mới nằm trên trục ảo.

* Một mạch có chứa nguồn phụ thuộc thì điều kiện ổn đinh tùy thuộc giá trị của nguồn này.

Thí dụ 7.8

Tìm tổng trở vào của mạch và điều kiện của g_m để mạch ổn định khi mạch được kích thích bởi một nguồn dòng điện (H 7.11a)



(a) (H 7.11) (b)

Vẽ lại mạch ở lãnh vực s, với nguồn kích thích I_1(s) (H 7.11b).

Viết KCL cho mạch

$$\mathbf{I}_1(s)=\mathbf{I}_2(s)+\frac{\mathbf{V}_2(s)}{5+2/s} \qquad (1)$$

Với $\mathbf{I}_2(s)=g_m\mathbf{V}_1(s)$ (2)

Và $\mathbf{V}_2(s)-\mathbf{V}_1(s)=-\mathbf{I}_1(s)$ (3)

Thay (2) và (3) vào (1)

$$\mathbf{Z}(s)=\frac{\mathbf{V}_1(s)}{\mathbf{I}_1(s)}=\frac{6s+2}{(1+5g_m)s+2g_m}$$

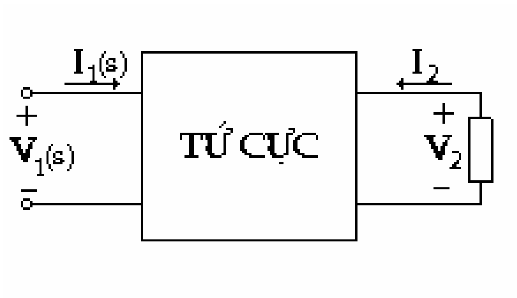
Đáp ứng tự nhiên xác định bởi Cực của **Z**(s)

$$p_1=\frac{-2g_m}{1+5g_m}$$

p_1 là số thực nên điều kiện để mạch ổn định là $p_1 < 0$

$-2g_m(1+5g_m)<0$ hay $g_m <-1/5$ và $g_m>0$.

7.4.3.2 Hàm truyền



(H 7.12)

Xét một tứ cực (H 7.12). Tùy theo tín hiệu vào và tín hiệu ra, hàm số mạch có thể là một trong bốn lượng sau:

$$\frac{\mathbf{V}_2(s)}{\mathbf{I}_1(s)}, \qquad \frac{\mathbf{V}_2(s)}{\mathbf{V}_1(s)}, \qquad \frac{\mathbf{I}_2(s)}{\mathbf{I}_1(s)}, \qquad \frac{\mathbf{I}_2(s)}{\mathbf{V}_1(s)}$$

* Trong mỗi trường hợp, hàm số mạch diễn tả quan hệ giữa dòng điện và hiệu thế ở 2 cặp cực khác nhau và được gọi là **hàm truyền**.

* Cực của hàm truyền cũng xác định tính chất của đáp ứng tự nhiên

Với mạch ổn định **H**(s) không thể có Cực nằm trên 1/2 mặt phẳng phải hay có Cực đa trùng trên trục ảo.

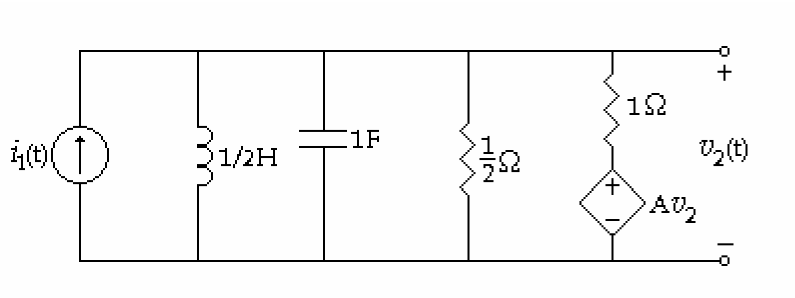
* Tổng quát 1/**H**(s) không là hàm truyền khác của cùng một mạch nên tính chất của đáp ứng tự nhiên không thể xác định bởi Zero của **H**(s).

Thí dụ 7.9

Tìm hàm truyền $\mathbf{H}(s)=\dfrac{\mathbf{V}_2(s)}{\mathbf{I}_1(s)}$ của mạch (H 7.13)

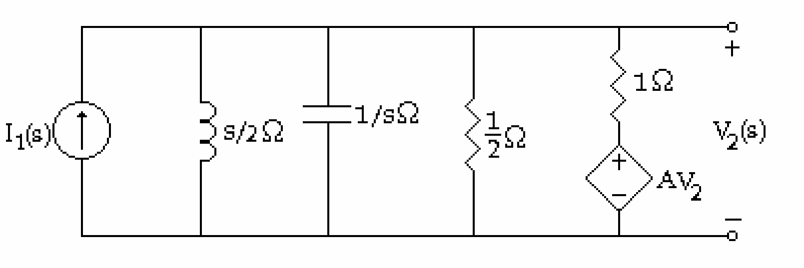
Xác định vị trí Cực của **H**(s) khi A biến thiên từ $0\rightarrow\infty$.

Giá trị A để mạch ổn định



(H 7.13)

Vẽ lại mạch ở lãnh vực tần số (H 7.14)



(H 7.14)

Viết KCL cho mạch

phức -

$$\frac{\mathbf{V}_2}{s/2}+\frac{\mathbf{V}_2}{1/s}+\frac{\mathbf{V}_2}{1/2}+\frac{\mathbf{V}_2-A\mathbf{V}_2}{1}=\mathbf{I}_1 \qquad (1)$$

Hàm truyền

$$\mathbf{H}(s)=\frac{\mathbf{V}_2(s)}{\mathbf{I}_1(s)}=\frac{s}{s^2+(3-A)s+2} \qquad (2)$$

Cực của **H**(s) tùy giá trị của A

Nghiệm của D(s)=0

$s^2+(3-A)s+2=0$ (3)

$\Delta=(3-A)^2-8=A^2-6A+1$

$\Delta\geq 0$ khi $A\leq 3-2\sqrt{2}$ hay $A\geq 3+2\sqrt{2}$

Khi A biến thiên từ $0\rightarrow\infty$ ta có các trường hợp sau:

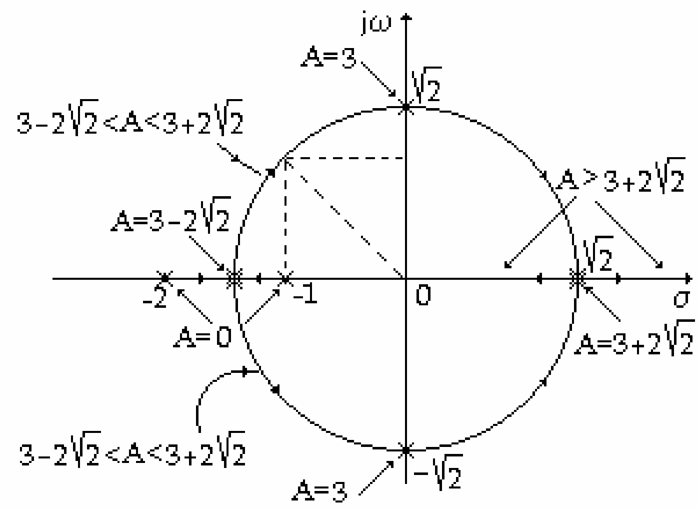
* A=0 phương trình (3) trở thành $s^2-3s+2=0$ có nghiệm $s_{1,2}=-1$ & -2

H(s) có 2 Cực phân biệt nằm trên phần âm của trục thực

$p_1=-1$ và $p_2=-2$

* $0<A<3-2\sqrt{2}$

- Khi A tăng từ 0 đến $3-2\sqrt{2}$ phương trình (3) vẫn có 2 nghiệm âm phân biệt, các Cực p_1 và p_2 nằm trên phần âm của trục thực và tiến lại gần nhau.



(H 7.15)

* Khi $A=3-2\sqrt{2}=0,172$ phương trình (3) có nghiệm kép,

H(s) có một Cực bậc 2 tại $p_1=p_2=-\sqrt{2}$

* $3-2\sqrt{2}<A<3+2\sqrt{2}$ phương trình (3) có 2 nghiệm phức liên hiệp

$p_1=\sigma_1+j\omega_1$ và $p_2=\sigma_1-j\omega_1$ Với $p_1.p_2=\sigma_1^2+\omega_1^2=(\sqrt{2})^2=2$

- Khi A thay đổi, quỹ tích nghiệm là vòng tròn tâm O bán kính $\sqrt{2}$, nói cách khác Cực của **H**(s) di chuyển trên vòng tròn này

* A=3 , phương trình (3) có 2 nghiệm ảo liên hiệp, $\pm j\sqrt{2}$ p_1 và p_2 nằm trên trục ảo

* $A=3+2\sqrt{2}=5,828$, phương trình (3) có nghiệm kép,

H(s) có một Cực bậc 2 tại $p_1=p_2=\sqrt{2}$

* $A>3+2\sqrt{2}$, phương trình (3) có 2 nghiệm thực dương, **H**(s) có các Cực nằm trên phần dương của trục thực

* $A\rightarrow\infty$ một Cực $\rightarrow\infty$ và một Cực $\rightarrow 0$

Tóm lại, qua biện luận trên ta rút ra được kết quả sau:

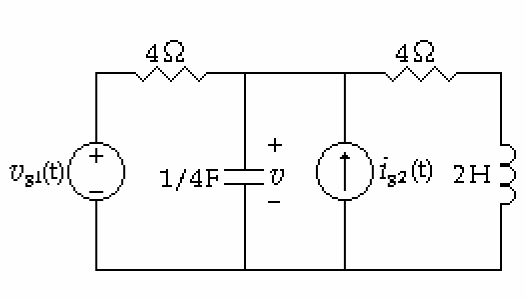
* A<3: Mạch ổn định
* A=3: Mạch dao động với tần số $\omega = \sqrt{2}$ rad/s
* A>3 : Mạch dao động với biên độ tăng dần (bất ổn)

(H 7.15) cho vị trí các Cực theo trị của A, gọi là hình quỹ tích nghiệm.

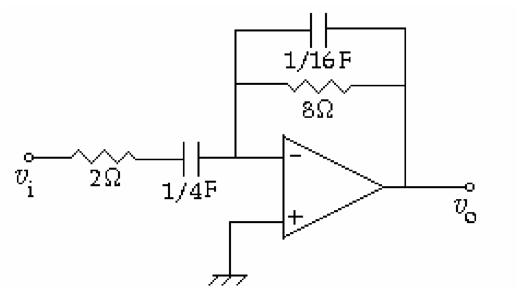
BÀI TẬP

--o0o--

7.1 Xác định đáp ứng ép v(t) của mạch (H P7.1). Cho $v_{g1}=4e^{-2t}\cos(t-45^o)$ V và $i_{g2}=2e^{-t}$A
7.2 Mạch (H P7.2). Xác định **H**(s)=V$_o$(s)/**V**$_i$(s). Suy ra đáp ứng ép v_o(t) nếu v_i=5cost V

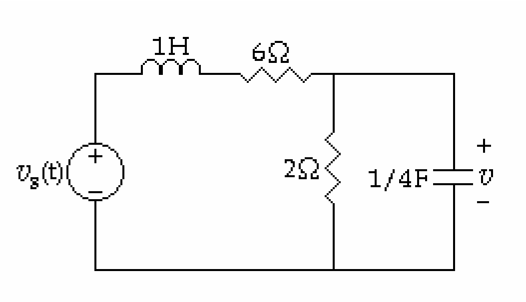


(H P7.1)

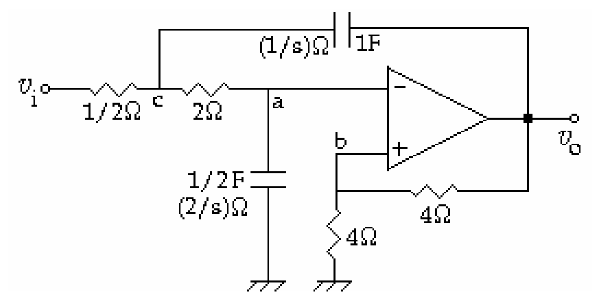


(H P7.2)

7.3 Mạch (H P7.3). Xác định **Z**(s), tổng trở vào của mạch, và v(t). Cho $v_g=16e^{-4t}\cos 2t$ V
7.4 Mạch (H P7.4). Xác định **H**(s)=V$_o$(s)/**V**$_i$(s). Suy ra đáp ứng ép v_o(t) nếu $v_i=e^{-t}\cos t$ V

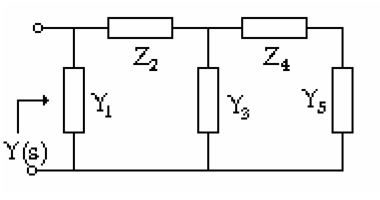


(H P7.3)



(H P7.4)

7.5 Mạch (H P7.5).

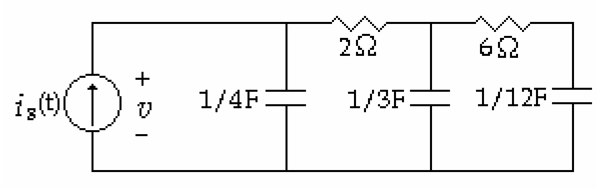


(H P7.5)

Chứng minh

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{Y}_1 + \cfrac{1}{\mathbf{Z}_2 + \cfrac{1}{\mathbf{Y}_3 + \cfrac{1}{\mathbf{Z}_4 + \cfrac{1}{\mathbf{Y}_5}}}}$$

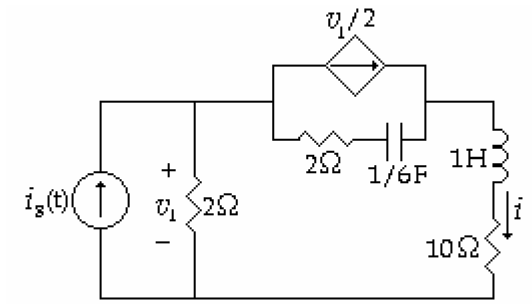
7.6 Dùng kết quả bài 7.5 để xác định tổng trở vào của mạch (H P7.6), sau đó xác định đáp ứng ép v(t). Cho $i_g=5e^{-2t}\cos t$ (A)



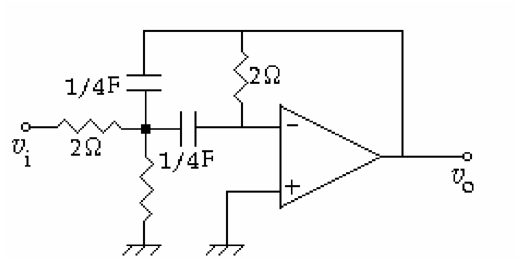
(H P7.6)

7.7 Dùng định lý Thevenin xác định dòng điện $i(t)$ trong mạch (H P7.7).
Cho $i_g(t)=8e^{-2t}\cos 4t$ A

7.8 Mạch (H P7.8). Xác định $\mathbf{H}(s)=\mathbf{V}_o(s)/\mathbf{V}_i(s)$. Suy ra đáp ứng ép $v_o(t)$ nếu $v_i=e^{-t}\cos t$ V

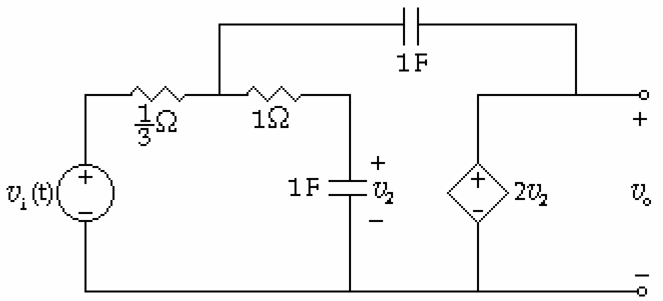


(H P7.7)



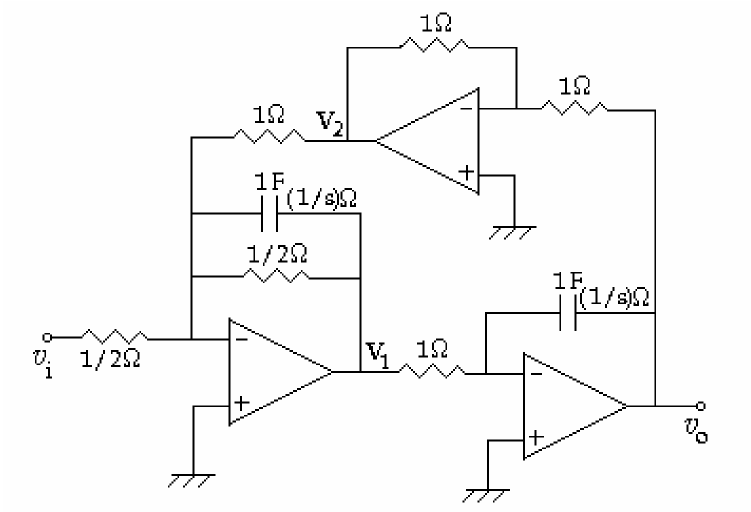
(H P7.8)

7.9 Mạch (H P7.9). Xác định $\mathbf{H}(s)=V_o(s)/\mathbf{V}_i(s)$ và đáp ứng ép $v_o(t)$ nếu $v_i=2e^{-2t}\cos t$ V



(H P7.9)

7.10 Mạch (H P7.10). Xác định $\mathbf{H}(s)=V_o(s)/\mathbf{V}_i(s)$ và đáp ứng ép $v_o(t)$ nếu $v_i=6e^{-2t}\cos t$ V



(H P7.10)

✷ CHƯƠNG 8

ĐÁP ỨNG TẦN SỐ

✷ ĐÁP TUYẾN TẦN SỐ
✷ DÙNG GIẢN ĐỒ CỰC-ZERO ĐỂ VẼ ĐÁP TUYẾN TẦN SỐ
✷ MẠCH LỌC
✷ CỘNG HƯỞNG
✷ HỆ SỐ PHẨM
✷ TỈ LỆ HÓA HÀM SỐ MẠCH
⊙ Qui tỉ lệ tổng trở
⊙ Qui tỉ lệ tần số
✷ DECIBEL

Chúng ta quay lại với mạch kích thích bởi nguồn hình sin và dùng hàm số mạch để khảo sát tính chất của mạch khi **tần số tín hiệu vào thay đổi**.

Đối tượng của sự khảo sát sẽ là các mạch lọc, loại mạch chỉ cho qua một khoảng tần số xác định. Tính chất của mạch lọc sẽ thể hiện rõ nét khi ta vẽ được đáp tuyến tần số của chúng.

Các đại lượng liên quan đến tính chất của mạch như **hệ số phẩm**, **độ rộng băng tần** cũng được giới thiệu ở đây.

Cuối cùng chúng ta sẽ giới thiệu phương pháp **qui tỉ lệ hàm số mạch** (network scaling) để đạt được các mạch điện với các phần tử có giá trị thực tế.

8.1 ĐÁP TUYẾN TẦN SỐ

Hàm số mạch của mạch có kích thích hình sin là $\mathbf{H}(j\omega)$, thường là một số phức nên ta có thể viết:

$$\mathbf{H}(j\omega)= \mathrm{Re}[\mathbf{H}(j\omega)]+j\mathrm{Im}[\mathbf{H}(j\omega)] \qquad (8.1)$$

Hay dưới dạng cực

$$\mathbf{H}(j\omega)= |\mathbf{H}(j\omega)|e^{j\phi(\omega)} \qquad (8.2)$$

$|\mathbf{H}(j\omega)|$ là biên độ và $\phi(\omega)$ là pha của $\mathbf{H}(j\omega)$

$$|\mathbf{H}(j\omega)| = \sqrt{\mathrm{Re}[\mathbf{H}(j\omega)]^2 + \mathrm{Im}[\mathbf{H}(j\omega)]^2} \qquad (8.3)$$

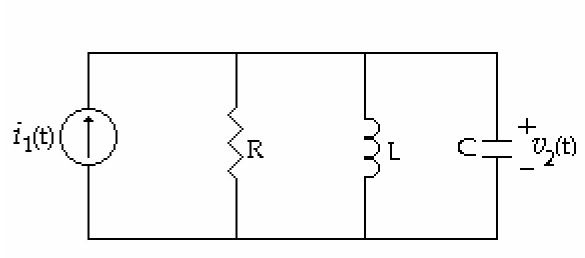
$$\phi(\omega) = \tan^{-1}\frac{\mathrm{Im}[\mathbf{H}(j\omega)]}{\mathrm{Re}[\mathbf{H}(j\omega)]} \qquad (8.4)$$

Ta gọi đáp tuyến tần số để chỉ các đường biểu diễn của biên độ $|\mathbf{H}(j\omega)|$ và góc pha $\phi(\omega)$ theo tần số ω.

Các đường biểu diễn này được gọi là **Đáp tuyến biên độ** và **Đáp tuyến pha**

Thí dụ 8.1

Vẽ đáp tuyến tần số của hàm số mạch $\mathbf{H}(j\omega) = \dfrac{\mathbf{V}_2(j\omega)}{\mathbf{I}_1(j\omega)}$ của mạch (H 8.1)



(H 8.1)

Ta có

$$\mathbf{H}(j\omega)=\frac{\mathbf{V}_2(j\omega)}{\mathbf{I}_1(j\omega)}=\frac{1}{1/R+j(\omega C-1/\omega L)}$$

$$|\mathbf{H}(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{(1/R)^2+(\omega C-1/\omega L)^2}}$$

$$\phi(\omega)=-\tan^{-1}R(\omega C-1/\omega L)$$

Vì R, L, C là các hằng số nên $|\mathbf{H}(j\omega)|$ đạt trị cực đại khi $\omega=\omega_o$ xác định bởi

$$\omega_o C-1/\omega_o L=0 \text{ hay } \omega_o=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

và $|\mathbf{H}(j\omega)|_{max}=|\mathbf{H}(j\omega_o)|=R$

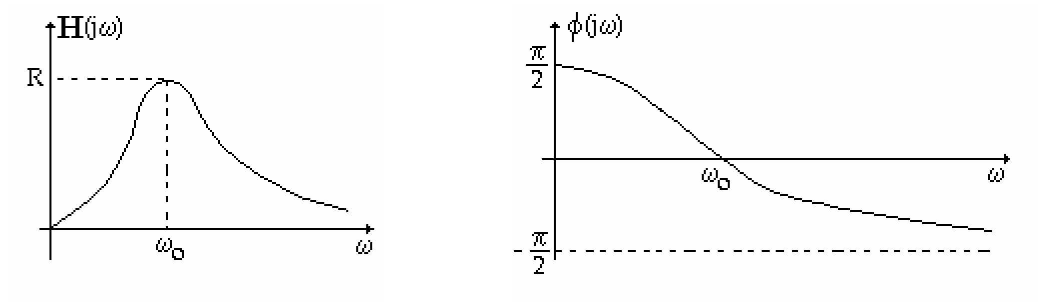
Để vẽ đáp tuyến tần số ta xác định $|\mathbf{H}(j\omega)|$ và $\phi(\omega)$ ứng với vài trị đặc biệt của ω

* $\omega=0 \Rightarrow |\mathbf{H}(j\omega)|=0$ và $\phi(\omega)=\pi/2$

* $\omega=\omega_o \Rightarrow |\mathbf{H}(j\omega)|=R$ và $\phi(\omega)=0$

* $\omega\rightarrow\infty \Rightarrow |\mathbf{H}(j\omega)|\rightarrow 0$ và $\phi(\omega)=-\pi/2$

Đáp tuyến vẽ ở (H 8.2)



(a) (H 8.2) (b)

Trong thí dụ trên, giả sử $i_1(t)=I\cos\omega t$ thì $\mathbf{I}_1(j\omega)=I_1\angle 0^o$

Đáp ứng $\mathbf{V}_2(j\omega)=\mathbf{I}_1.\mathbf{H}(j\omega)$. Ta thấy $\mathbf{V}_2$ được xác định một cách đơn giản là tích của hàm mạch với một hằng số. Vì vậy những thông tin mà ta có được khi khảo sát hàm số mạch cũng chính là những thông tin của đáp ứng. Vì lý do này và cũng vì hàm số mạch chỉ tùy thuộc vào mạch mà không tùy thuộc vào kích thích nên người ta thường dùng đáp tuyến tần số của hàm số mạch để khảo sát mạch điện.

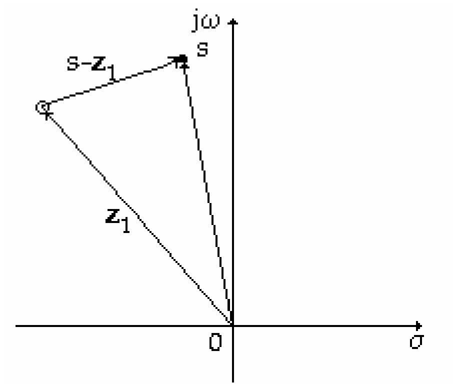
8.2 DÙNG GIẢN ĐỒ CỰC - ZERO ĐỂ VẼ ĐÁP TUYẾN TẦN SỐ

Coi hàm số mạch

$$\mathbf{H}(s)=K\frac{(s-z_1)(s-z_2).....(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2).....(s-p_n)} \qquad (8.5)$$

K là hằng số

Nếu các Cực và Zero được diễn tả trên mặt phẳng phức bởi các vectơ thì các thừa số (s-z) cũng được diễn tả bởi các vectơ. (H 8.3) là một thí dụ



(H 8.3)

Trên đồ thị, trị s được ghi bằng một chấm đậm, vectơ vẽ từ z_1 đến s diễn tả thừa số s-z_1.

Suất và góc pha của thừa số này là $|s-z_1|$ và góc hợp bởi vectơ $\overrightarrow{s-z_1}$ với trục thực.

Như vậy suất và góc pha của **H**(s) xác định bởi

$$|\mathbf{H}(s)| = K\frac{|s-z_1||s-z_2|....|s-z_m|}{|s-p_1||s-p_2|....|s-p_n|} \qquad (8.6)$$

$$\phi(s) = \phi(K) + [\phi(s-z_1) + \phi(s-z_2) + ...] - [\phi(s-p_1) + \phi(s-p_2) + ...]$$

K là số thực nên

$\phi(K) = 0$ khi $K>0$ và

$= \pm 180^o$ khi $K<0$ (8.7)

Các thừa số trong (8.6) và (8.7) được xác định bằng cách đo trên đồ thị các độ dài của các vectơ tương ứng và các góc hợp bởi các vectơ này với trục thực.

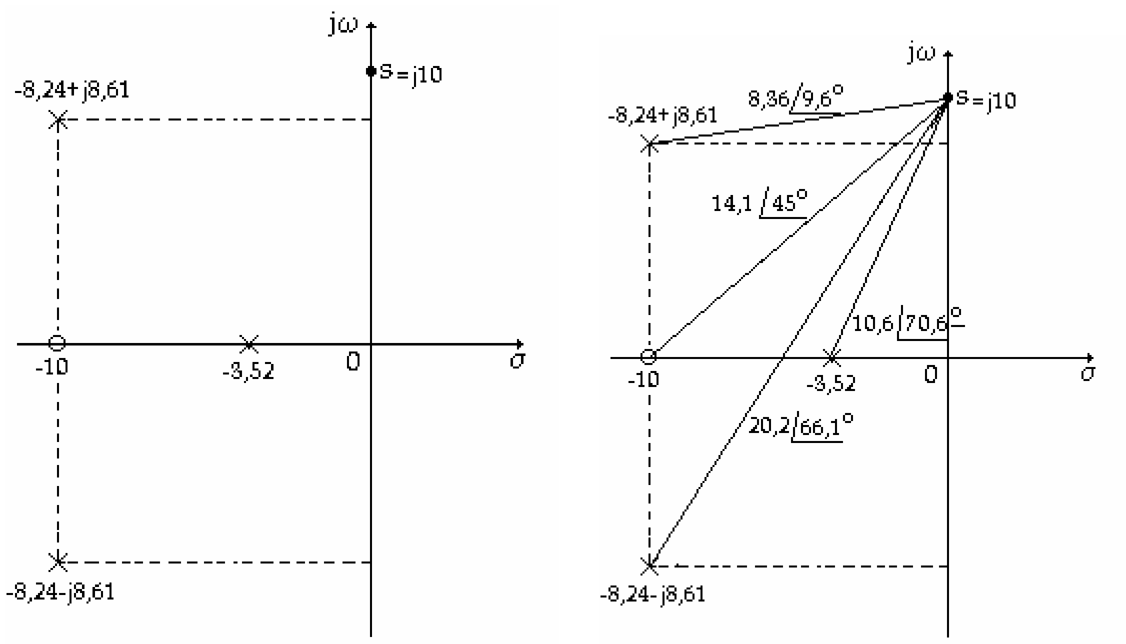
Thí dụ 8.2

Tính

$$\mathbf{H}(s) = \frac{25(s+10)}{s^3 + 20s^2 + 200s + 500} \text{ khi } s=j10$$

$$\mathbf{H}(s) = \frac{25(s+10)}{(s+3,52)(s+8,24-j8,61)(s+8,24+j8,61)}$$

Giản đồ Cực-Zero và các vectơ xác định **H**(j10) cho trên (H 8.4). Các trị ghi kèm trên đồ thị có được bằng cách dùng thước đo.



(H 8.4)

Từ các giá trị trên đồ thị ta tính được

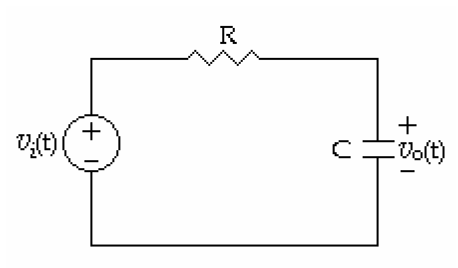
$$\left|\mathbf{H}(j10)\right| = \frac{25.14,1}{10,6.20,2.8,36} = 0,196$$

$\phi(10)=45^o-(70,6^o+66,1^o+9,6^o)=-101,3^o$

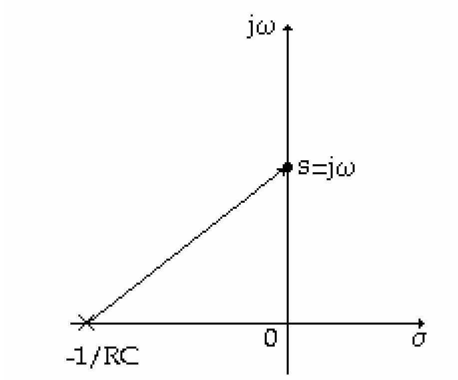
$\mathbf{H}(j10)=0,196\angle-101,3^o$

Thí dụ 8.3

Vẽ đáp tuyến tần số mạch (H 8.5)



(H 8.5)



(H 8.6)

Hàm số truyền của mạch

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{V}_o(s)}{\mathbf{V}_i(s)} = \frac{1}{RC}\frac{1}{s-p_1}$$

Với $p_1=-1/RC$

Giản đồ Cực-Zero vẽ ở (H 8.6)

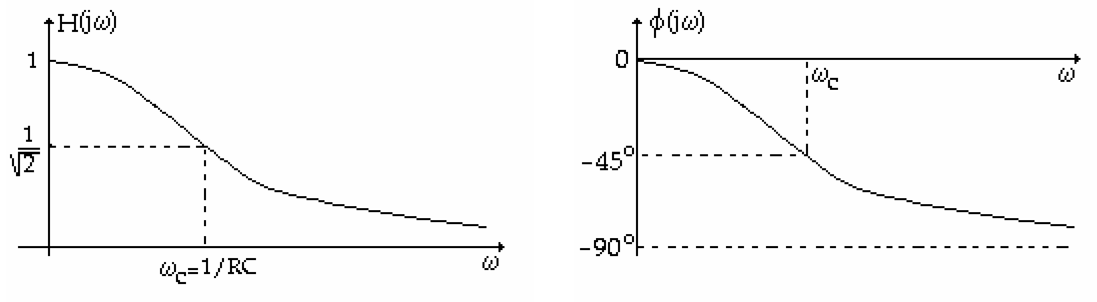
Để vẽ đáp tuyến, thay s=jω vào hàm số mạch. Trên đồ thị s nằm trên trục ảo cách gốc O đoạn bằng ω. Khi ω thay đổi từ $0\to\infty$, điểm s di chuyển trên trục ảo từ gốc O ra vô cùng.

Tại * $\omega=0$, $s-p_1=1/RC\angle 0^o$ $|\mathbf{H}(j\omega)|=1$ và $\phi(\omega)=0^o$

* $\omega=1/RC=\omega_C$ $s-p_1=\sqrt{2}/RC\angle 45^o$ $|\mathbf{H}(j\omega)|=1/\sqrt{2}$ và $\phi(\omega)=-45^o$

* $\omega\to\infty$ $s-p_1\to\infty\angle 90^o$ $|\mathbf{H}(j\omega)|\to 0$ và $\phi(\omega)\to-90^o$

Đáp tuyến tần số vẽ ở (H 8.7)



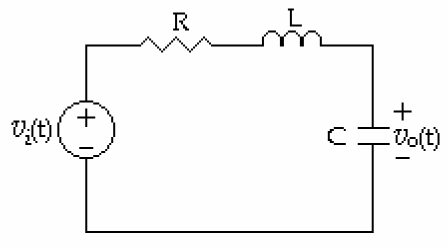
(H 8.7)

Thí dụ 8.4

Xác định hàm số truyền $\mathbf{V}_o(s)/\mathbf{V}_i(s)$ của mạch (H 8.8). Vẽ đáp tuyến tần số trong 2 trường hợp

* $\alpha=\omega_o$
* $\alpha<<\omega_o$

Trong đó $\alpha=R/2L$ & $\omega_o^2=1/LC$



(H 8.8)

Ta có

$$\mathbf{V}_o(s)=\frac{\mathbf{V}_i(s)}{R+sL+1/sC}\frac{1}{sC}$$

$$=\frac{\mathbf{V}_i(s)}{s^2LC+sRC+1}$$

$$\mathbf{H}(s)=\frac{\mathbf{V}_o(s)}{\mathbf{V}_i(s)}=\frac{1/LC}{s^2+sR/L+1/LC}$$

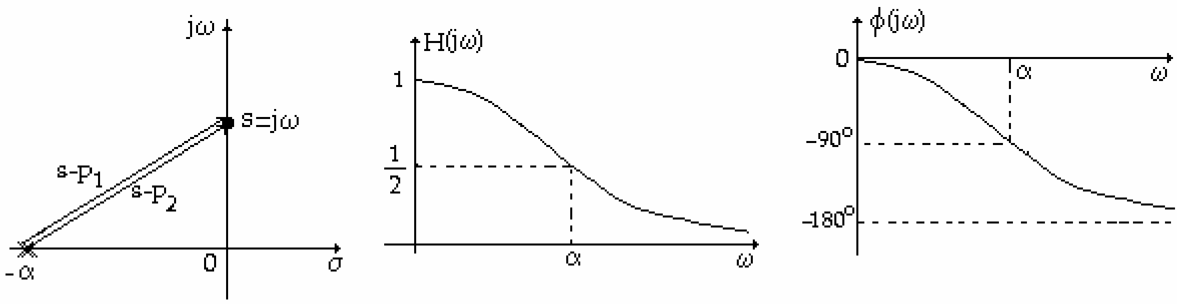
$$\mathbf{H}(s)=\frac{\omega_0^{\ 2}}{s^2+2\alpha s+\omega_0^{\ 2}}$$

❋ $\alpha=\omega_o$

$$\mathbf{H}(s)=\frac{\alpha^2}{(s+\alpha)^2}$$

H(s) có một cực kép tại s=-α. Giản đồ Cực-Zero gồm 2 vectơ trùng nhau (H8.9a). Các đáp tuyến tần số vẽ ở (H 8.9b) và (H 8.9c)

* $\omega=0$, $|s-p_1|=|s-p_2|=\alpha$ $\qquad$ $|\mathbf{H}(j\omega)|=1$ và $\phi(\omega)=0^o$
* $\omega=\alpha$ $\quad$ $|s-p_1|=|s-p_2|=\sqrt{2}\,\alpha$ $\qquad$ $|\mathbf{H}(j\omega)|=1/2$ và $\phi(\omega)=-90^o$
* $\omega\to\infty$ $\quad$ $|s-p_1|=|s-p_2|\to\infty$ $\qquad$ $|\mathbf{H}(j\omega)|\to 0$ và $\phi(\omega)\to-180^o$



(a) (b) (c)

(H 8.9)

❋ $\alpha << \omega_o$

Khi $\alpha<\omega_o$, **H**(s) có Cực tại $s=-\alpha\pm j\omega_d$ với $\omega_d=\sqrt{\omega_o^2-\alpha^2}$. Do đó, nếu $\alpha<<\omega_o$, các Cực ở rất gần trục ảo. Giản đồ cực - zero vẽ lại (H 8.10)

Cho ω thay đổi từ 0→ ∞, ta xét các giá trị đặc biệt của ω:

* ω=0 hai vectơ có cùng độ dài nhưng góc hợp với trục thực đối nhau nên $|\mathbf{H}(j\omega)|=1$ và $\phi(\omega)=0^o$

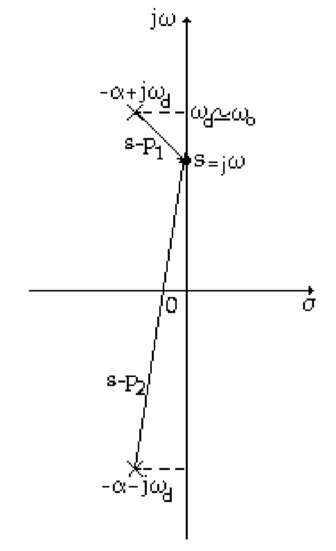
* ω tăng từ 0→ ∞ s=jω di chuyển trên trục ảo từ gốc O ra xa ∞

+ $\phi(s-p_1)$ và $\phi(s-p_2)$ đều tăng theo chiều dương nên $\phi(\omega)$ có giá trị âm.

+ $|\mathbf{H}(j\omega)|$ tăng, lúc đầu chậm sau nhanh hơn (vì $|s-p_1|$ luôn luôn giảm, nhưng lúc đầu chậm lúc sau nhanh hơn, còn $|s-p_2|$ luôn luôn tăng, nhưng mức độ tăng luôn nhỏ hơn mức độ giảm của $|s-p_1|$)

* $\omega=\omega_o$, điểm s đối diện với p_1, $|s-p_1|$ ngắn nhất, $|\mathbf{H}(j\omega)|$ đạt trị cực đại

$s-p_1=\alpha\angle 0^o$ và $s-p_2=2\omega_o\angle 90^o$ nên



$$|\mathbf{H}(j\omega)|_{max}=\frac{\omega_o^2}{|s-p_1||s-p_2|}=\frac{\omega_o^2}{\alpha.2\omega_o}=\frac{\omega_o}{2\alpha}$$

và $\phi(\omega)=-90^o$

* $\omega\cong\omega_o$ ($\omega=\omega_o\pm\alpha$) điểm s vẫn còn ở gần p_1, $|s-p_1|$ thay đổi nhanh trong khi $|s-p_2|$ gần như không đổi

$s-p_1=\sqrt{2}\alpha\angle\pm 45^o$ và $s-p_2=2\omega_o\angle 90^o$

$$|\mathbf{H}(j\omega)|=\frac{\omega_o^2}{\sqrt{2}\alpha.2\omega_o}=\frac{\omega_o}{2\sqrt{2}\alpha}=\frac{|\mathbf{H}(j\omega)|_{max}}{\sqrt{2}}$$

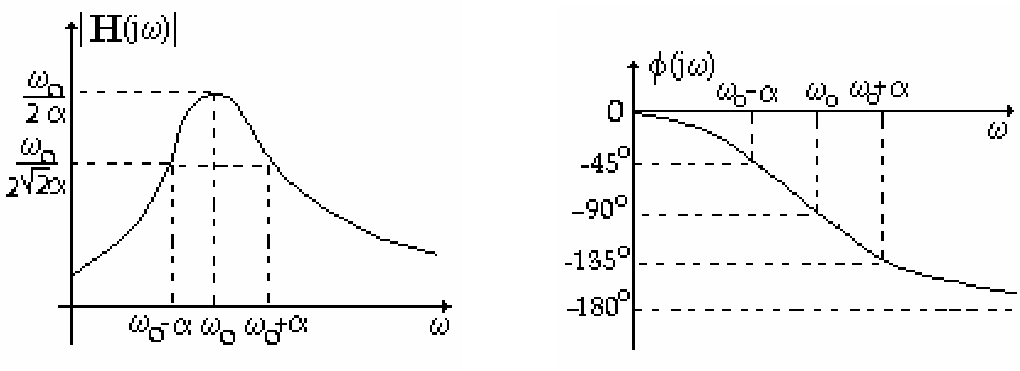
$\phi(\omega)=\pm 45^o-90^o=-45^o$ & -135^o

* ω rất lớn (ω→∞)

$|s-p_1|=|s-p_2|\to\infty$ $\phi(s-p_1)=\phi(s-p_2)\to +90^o$

$|\mathbf{H}(j\omega)|\to 0$ và $\phi(\omega)\to -180^o$

Đáp tuyến tần số vẽ ở (H 8.11)



(H 8.11)

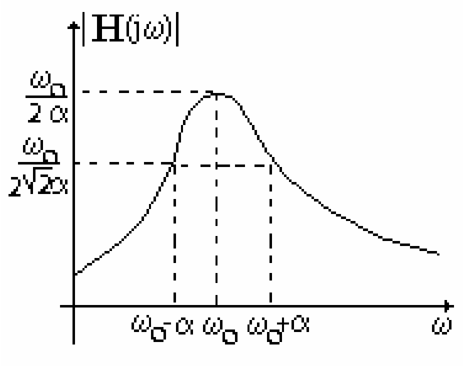
8.3 MẠCH LỌC

Đáp tuyến của mạch lọc dải thông
Xét mạch ở **thí dụ 8.1**, |**H**(jω)| có trị cực đại tại $\omega=\omega_o$.
Dải tần số qua mạch lọc xác định bởi $\omega_{c1} \leq \omega \leq \omega_{c2}$
Trong đó ω_{c1} và ω_{c2} là các tần số cắt, xác định tại điểm mà biên độ tín hiệu ra bằng $1/\sqrt{2}$ lần biên độ ra cực đại (hay $|\mathbf{H}(j\omega)|=(1/\sqrt{2})|\mathbf{H}(j\omega)|_{max}$).

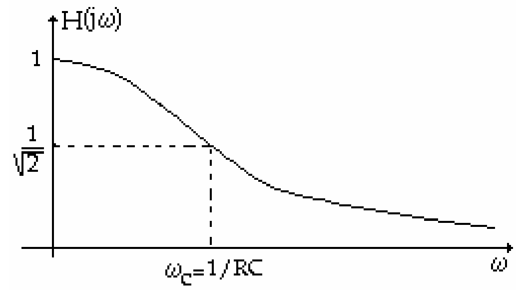
Băng thông hay **Độ rộng băng tần** được định nghĩa:

$BW=\omega_{c2}-\omega_{c1}$

Mạch trong **thí dụ 8.4** cũng là mạch lọc dải thông, có
Tần số giữa $\omega_o = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$,
Tần số cắt là $\omega_o \pm \alpha$,
Độ rộng băng tần BW=2α (H 8.12).



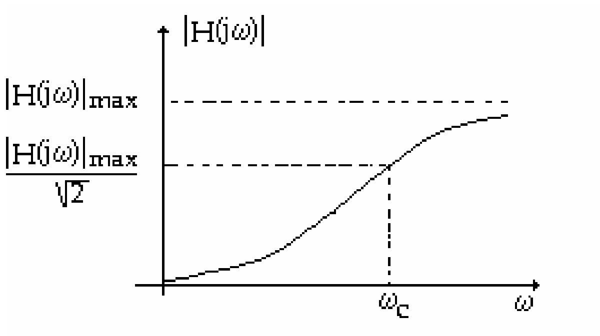
(H 8.12)



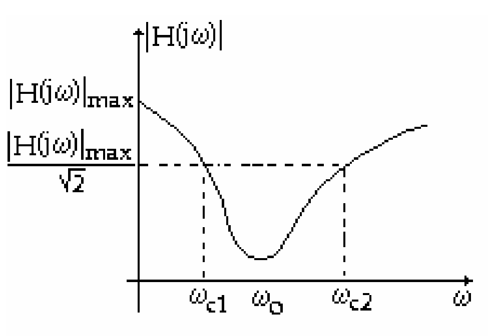
(H 8.13)

Mạch của **thí dụ 8.3**, là mạch **lọc hạ thông** (low pass filter),
Tần số cắt $\omega_c=1/RC$
và băng thông BW=1/RC - 0 = 1/RC.

(H 8.14) và (H 8.15) là đáp tuyến của **mạch lọc thượng thông** và **mạch lọc dải loại**



(H 8.14)



(H 8.15)

8.4 CỘNG HƯỞNG

Một mạch điện kích thích bởi tín hiệu hình sin ở trạng thái cộng hưởng khi biên độ của hàm số mạch đạt giá trị cực đại hoặc cực tiểu.

Mạch thí dụ 8.1, $|\mathbf{H}(j\omega)|$ có trị cực đại tại $\omega=\omega_o$.

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$ là tần số cộng hưởng của mạch.

Tại tần số này tổng trở của mạch **Z(s)=R**, cũng đạt trị cực đại.

* Đối với mạch RLC mắc song song (xem thí dụ 8.1), các Cực của hàm số mạch xác định bởi

$$P_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$$

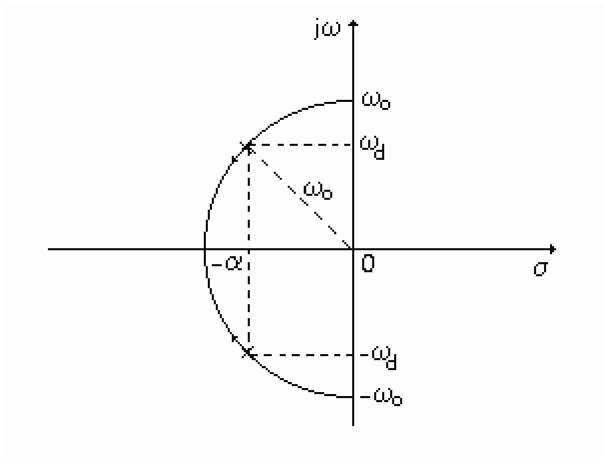
Trong đó $\alpha = \frac{1}{2RC}$ và $\omega_d = \sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2}$

$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ là tần số cộng hưởng

Ta thấy ω_o chính là bán kính vòng tròn quỹ tích của Cực khi α thay đổi

* Khi R khá lớn (hay α rất nhỏ) , tần số cộng hưởng rất gần với tần số tự nhiên. Đáp tuyến biên độ có đỉnh nhọn ($|\mathbf{H}(j\omega)|_{max}$=R)

* Khi $R\to\infty$, tần số cộng hưởng trùng với tần số tự nhiên. Đỉnh của đáp tuyến có biên độ $\to\infty$



(H 8.16)

* Đối với mạch RLC mắc nối tiếp, kích thích bởi nguồn hiệu thế **V**(s), đáp ứng là dòng điện **I**(s), Hàm số mạch chính là tổng dẫn

$$\mathbf{H}(j\omega) = \mathbf{Y}(j\omega) = \frac{\mathbf{I}(j\omega)}{\mathbf{V}(j\omega)} = \frac{1}{R + j(\omega L + 1/\omega C)}$$

Cộng hưởng xảy ra khi $\omega = \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ tương ứng với trị cực đại của $|\mathbf{Y}(j\omega)|$ là 1/R

Khi có cộng hưởng xảy ra , tác dụng của các phần tử L và C triệt tiêu với nhau và mạch tương đương với một điện trở thuần.

8.5 HỆ SỐ PHẨM

Tổng quát, hàm số mạch của một mạch lọc dải thông bậc 2 có dạng:

$$\mathbf{H}(s) = \frac{Ks}{s^2 + as + b} \qquad (8.10)$$

K, a> 0 & b> 0 là các hằng số thực.

Để khảo sát biên độ của **H**(s), thay s =jω

$$|\mathbf{H}(j\omega)| = \frac{|K\omega|}{\sqrt{(b - \omega^2)^2 + a^2\omega^2}} = \frac{|K|}{\sqrt{a^2 + [(b - \omega^2)/\omega]^2}}$$

$$|\mathbf{H}(j\omega)|_{max} = \frac{|K|}{a}$$ tại tần số cộng hưởng $\omega_o = \sqrt{b}$ (8.11)

Tần số cắt xác định bởi:

$$\mathbf{H}(j\omega_c) = \frac{\mathbf{H}_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{|K|}{a\sqrt{2}} \quad \text{hay} \quad \frac{|K|}{\sqrt{a^2 + [(b - \omega_c^2)/\omega_c]^2}} = \frac{|K|}{a\sqrt{2}}$$

Điều này đạt được khi

$$\frac{b-\omega_c^{\ 2}}{\omega_c}=\pm a \quad \text{hay} \quad \omega_c^{\ 2}\pm a\omega_c-b=0$$

Phương trình có 4 nghiệm, ta lấy 2 nghiệm dương

$$\omega_{c1}=\frac{-a+\sqrt{a^2+4b}}{2} \quad \text{và} \quad \omega_{c2}=\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2} \qquad (8.12)$$

Độ rộng băng tần

$BW=\omega_{c2}-\omega_{c1}=a$

Thay các giá trị vừa xác định được vào (8.10)

$$\mathbf{H}(s)=\frac{Ks}{s^2+BWs+\omega_o^{\ 2}}$$

Đây là dạng tổng quát của hàm số mạch của mạch lọc dải thông bậc 2 có tần số giữa ω_o và băng thông BW

Ngoài ra từ (8.11), (8.12) ta có:

$\omega_o^{\ 2}=\omega_{c2}.\omega_{c1}$

Một mạch lọc dải thông thường cũng là mạch cộng hưởng mà tính chất của nó được xác định bởi một đại lượng gọi là **hệ số phẩm** Q, được định nghĩa như sau:

$$Q=\frac{\omega_o}{BW} \qquad (8.13)$$

Một mạch có hệ số Q nhỏ thì độ rộng băng tần lớn và ngược lại. Băng thông nhỏ đồng nghĩa với độ chọn lọc tốt, vậy hệ số phẩm Q xác định độ chọn lọc của mạch.

Q càng lớn độ chọn lọc càng tốt, sự cộng hưởng càng nhọn.

Dùng hệ số phẩm Q ta viết lại biểu thức hàm số mạch

$$\mathbf{H}(s)=\frac{Ks}{s^2+\frac{\omega_o}{Q}s+\omega_o^{\ 2}} \qquad (8.14)$$

và

$$\omega_{c1},\omega_{c2}=\pm\frac{\omega_o}{2Q}+\sqrt{\omega_o^{\ 2}+(\frac{\omega_o}{2Q})^2}=\pm\frac{\omega_o}{2Q}+\omega_o\sqrt{1+(\frac{1}{2Q})^2} \qquad (8.15)$$

Nếu Q lớn (Q>>5) 1/2Q<<1, hệ thức (8.15) trở thành

$$\omega_{c1},\omega_{c2}=\pm\frac{\omega_o}{2Q}+\omega_o=\omega_o\mp\frac{BW}{2} \qquad (8.16)$$

Hay

$$\omega_{c1}=\omega_o-\frac{BW}{2} \quad \text{và} \quad \omega_{c2}=\omega_o+\frac{BW}{2}$$

ω_{c2} và ω_{c1} cách đều ω_o. Đáp tuyến biên độ gần đối xứng.

Thí dụ 8.5 Cho mạch lọc dải thông có:

$\mathbf{H}(s)=\dfrac{2s}{s^2+0{,}2s+1}$. Xác định ω_o , ω_{c1}, ω_{c2} và BW

$\omega_o^{\ 2}=1 \Rightarrow \omega_o=1$ rad/s

$$\omega_{c1}=\frac{-a+\sqrt{a^2+4b}}{2}=\frac{-0{,}2+\sqrt{0{,}04+4}}{2}=0{,}905\ \text{rad/s}$$

$$\omega_{c2}=\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}=\frac{0,2+\sqrt{0,04+4}}{2}=1,105 \text{ rad/s}$$

Băng thông

$BW=\omega_{c2}-\omega_{c1}=0,2$ rad/s

hệ số phẩm

$$Q=\frac{\omega_o}{BW}=\frac{1}{0,2}=5$$

Nếu xem Q=5 là lớn, ta dùng (8.16) để xác định ω_{c2} và ω_{c1}

$$\omega_{c1}=\omega_o-\frac{BW}{2}=1-\frac{0,2}{2}=0,9 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{c2}=\omega_o+\frac{BW}{2}=1+\frac{0,2}{2}=1,1 \text{ rad/s}$$

So với các kết quả trên, sai biệt khoảng 0,5%.

8.6 TỈ LỆ HÓA HÀM SỐ MẠCH (Scaling network function)

Trong các bài toán trước đây ta luôn luôn gặp các R, L và C với những giá trị thật là lý tưởng như R = 1Ω, 2Ω, 3Ω . . .,L = 1H, 2H, 3H . . .,C =1F, 2F, 3F . . .và các tần số thì khoảng 1vài rad/s. Mạch điện với các trị như thế quả là không thực tế chút nào, vậy để có những mạch với các phần tử gần với thật, chúng ta phải chuyển đổi các giá trị này bằng cách qui tỉ lệ cho mạch.

Có 2 cách qui tỉ lệ: qui tỉ lệ tổng trở và qui tỉ lệ tần số

8.6.1 Qui tỉ lệ tổng trở

Tổng trở của mạch $Z'(s)=R'+sL'+\frac{1}{sC'}$

Qui tỉ lệ với hệ số K_i $Z(s)=K_iZ'(s)$

$$Z(s)=K_i(R'+sL'+\frac{1}{sC'})$$

$$Z(s)=K_iR'+sK_iL'+\frac{1}{sC'/K_i}$$

Các phần tử R, L, C của mạch sau khi qui tỉ lệ thỏa hệ thức

$$Z(s)=R+sL+\frac{1}{sC}$$

Ta thấy ngay

$R=K_iR$ $L=K_iL'$ $C=C'/K_i$

Như vậy, để qui tỉ lệ tổng trở của mạch với hệ số K_i ta nhân R và L với K_i và chia C cho K_i

Đối với nguồn phụ thuộc, sự qui tỉ lệ tùy vào đơn vị của hệ số của nguồn, nếu hệ số của nguồn có đơn vị tổng trở, ta nhân cho K_i , nếu là tổng dẫn, ta chia cho K_i.

8.6.2 Qui tỉ lệ tần số

Khi qui tỉ lệ tần số cho một mạch, giá trị của hàm số mạch phải không đổi

Giả sử hàm số mạch là **H**'(S) với S=jΩ

Sau khi qui tỉ lệ, mạch làm việc với tần số $\omega=K_f\Omega$.

K_f là hệ số qui tỉ lệ tần số.

$\mathbf{H}'(S)=\mathbf{H}(s)$ với $S=s/K_f$

Gọi R’, L’, C’ là các giá trị trước khi qui tỉ lệ

Gọi R, L, C là các giá trị sau khi qui tỉ lệ.

Để hàm số mạch không đổi, các tổng trở Z_R, Z_L, Z_C phải không đổi sau khi qui tỉ lệ, nghĩa là ta phải có:

$sL=SL'$ hay $L=\frac{S}{s}L'=\frac{L'}{K_f}$

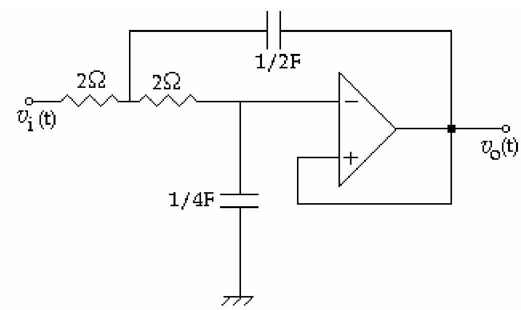
$R=R'$

Và $\frac{1}{sC}=\frac{1}{SC'}$ hay $C=\frac{S}{s}C'=\frac{C'}{K_f}$

Tóm lại, để qui tỉ lệ tần số cho mạch, ta chia L và C cho K_f và giữ nguyên R.

Thí dụ 8.6

Xác định hàm số mạch $\mathbf{H}(s)=\frac{\mathbf{V}_o(s)}{\mathbf{V}_i(s)}$ của mạch (H 8.17)



(H 8.17)

a. Qui tỉ lệ tổng trở của mạch với hệ số $K_i=500$, các phần tử trong mạch có trị như thế nào ?

b. Để đạt được tần số cắt là 20.000 rad/s, phải qui tỉ lệ tần số với hệ số là bao nhiêu ?

$$\mathbf{H}(s)=\frac{\mathbf{V}_o(s)}{\mathbf{V}_i(s)}=\frac{2}{s^2+2s+2}$$

Thay $s=j\omega$

$$|\mathbf{H}(j\omega)|=\frac{2}{\sqrt{(2-\omega^2)^2+4\omega^2}}$$

$$|\mathbf{H}(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^4/4}}$$

$|\mathbf{H}(j\omega)|$ giảm khi ω tăng, đây là mạch lọc hạ thông

Tần số cắt xác định bởi

$$|\mathbf{H}(j\omega_c)|=\frac{|\mathbf{H}(j\omega)|\max}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{hay} \quad \frac{1}{\sqrt{1+\omega_c{}^4/4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow \quad \omega_c{}^4=4 \quad \Rightarrow \quad \omega_c=\sqrt{2}$ rad/s

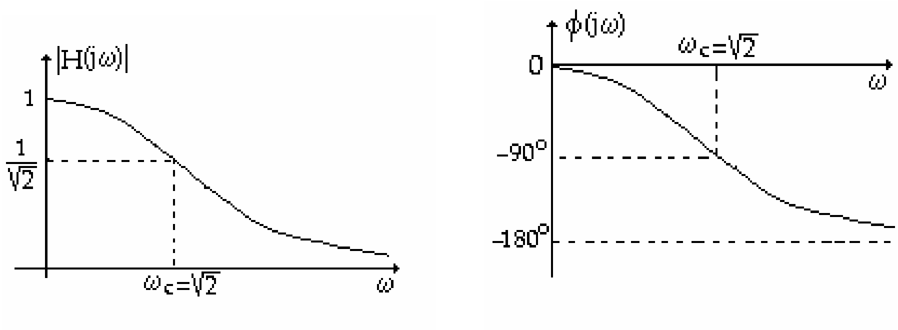
$$\phi(\omega)=-\tan^{-1}\frac{2\omega}{2-\omega^2}$$

$\omega=0 \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{H}(j\omega)|=1$ và $\phi(\omega)=0^o$

$\omega=\omega_C=\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{H}(j\omega)|=1/\sqrt{2}$ và $\phi(\omega)=-90^o$

$\omega \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{H}(j\omega)| \rightarrow 0$ và $\phi(\omega) \rightarrow -180^o$

Đáp tuyến



(H 8.18)

a. Với K_i=500 các phần tử thay đổi như sau:

R=2Ω trở thành 2x500 = 1000 Ω

C=1/2 F ⇒ 1/2x1/500 = 1/1000 F

C=1/4 F ⇒ 1/4x1/500 = 1/2000 F

Mạch OP-AMP có độ lợi không đổi , tỉ số V_o/V_i cũng không đổi

b. Để có ω_C =20.000 rad/s

$K_f=20.000/\sqrt{2}=10.000\sqrt{2}$

Các tụ trong mạch

C=1/2 F ⇒ $1/2 \times 1/10.000\sqrt{2}$ = 35 μ F

C=1/4 F ⇒ $1/4 \times 1/10.000\sqrt{2}$ = 17,5 μF

Thí dụ 8.7

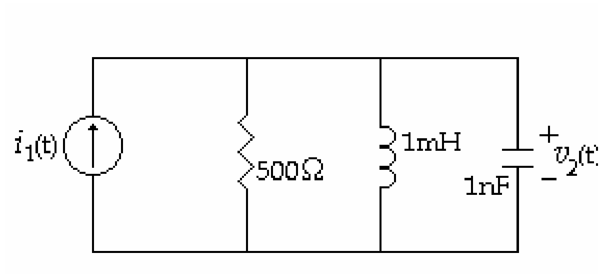
Trở lại **thí dụ 8.1**

Cho R=1Ω, L=2H và C=1/2 F

Đáp tuyến (H 8.2) có các trị cụ thể ω_o =1 rad/s

$|\mathbf{H}(j\omega)|_{max}$ =R=1

Giả sử ta phải qui tỉ lệ tổng trở và tần số sao cho ω_o =10^6 rad/s với tụ có trị 1nF. Xác định R và L.



(H 8.19)

Ta có $K_f=10^6$

$$C=10^{-9}=\frac{1/2}{K_iK_f}=\frac{1}{2.10^6K_i}$$

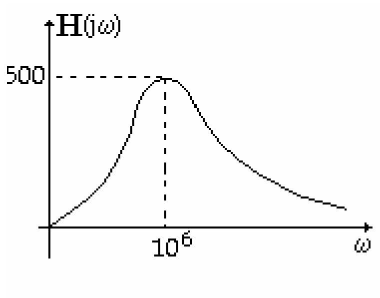
Suy ra K_i=500

Các trị R và L

R=1Ω ⇒ 1x500=500 Ω

$$L=2H \quad \Rightarrow \quad \frac{2K_i}{K_f}=\frac{2x500}{10^6}=10^{-3}\text{ H=1mH}$$

Mạch đã qui tỉ lệ (H 8.19) và đáp tuyến (H 8.20)



(H 8.20)

8.7 DECIBEL

Thính giác của con người nhạy cảm theo âm thanh có tính phi tuyến: Độ nhạy tỉ lệ với logarit của biên độ.

Để so sánh âm thanh người ta dùng logarit của hàm số mạch (tức độ lợi của mạch) thay vì dùng hàm số mạch và đơn vị được tính bằng Decibel (dB)

$dB=20\log_{10}|\mathbf{H}(j\omega)|$

Đơn vị được biết đến đầu tiên là Bel, định nghĩa bởi Alexander Graham Bell (1847-1922). Bel được định nghĩa như là một đơn vị công suất

$$\text{Bel} = \log_{10}\frac{P_2}{P_1}$$

Vì Bel là đơn vị quá lớn nên người ta dùng dB (1dB=1/10Bel)

$$dB = 10\log_{10}\frac{P_2}{P_1}$$

Nếu P_2 và P_1 là công suất trung bình trên cùng tổng trở thì:

$$dB = 10\log_{10}\frac{P_2}{P_1} = 10\log_{10}(\frac{V_2}{V_1})^2 = 20\log_{10}(\frac{V_2}{V_1})$$

Ngoài ra , trong kỹ thuật người còn dùng một đại lượng là độ suy giảm (attenuator) hay độ hao hụt (loss) xác định bởi

$$\alpha(\omega) = -20\log_{10}\frac{V_2}{V_1} = 20\log_{10}\frac{V_1}{V_2}$$

Một tín hiệu có tần số ω_1 với $\alpha(\omega_1)$ càng nhỏ thì qua mạch ít bị suy giảm.

Thí dụ 8.8

Mạch lọc hạ thông có hàm số mạch cho bởi

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{V}_o(s)}{\mathbf{V}_i(s)} = \frac{1}{s^2+\sqrt{2}s+1}$$

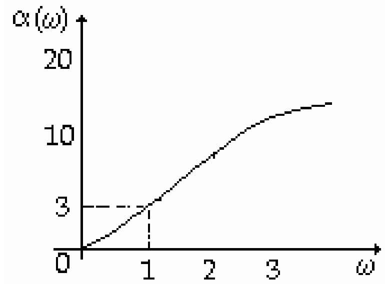
Xác định biên độ, tần số cắt, độ suy giảm và vẽ $\alpha(\omega)$

Ta có

$$|\mathbf{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^4}} \Rightarrow |\mathbf{H}(j\omega)|_{max} = 1$$

ω_c = 1 rad/s

$$\alpha(\omega) = 20\log_{10}\frac{1}{|H(j\omega)|} = 20\log(1+\omega^4)^{1/2}$$



(H 8.21)

(H 8.21) là giản đồ $\alpha(\omega)$.

BÀI TẬP

--o0o--

8.1 Chứng tỏ mạch điện có hàm số mạch dưới đây là mạch lọc thượng thông.

$$\mathbf{H}(s)=\frac{2s^2}{s^2+s+0,5}$$

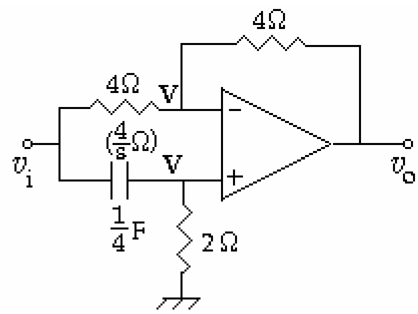
Tìm $|\mathbf{H}(j\omega)|_{MAX}$ và ω_c

8.2 Chứng tỏ mạch điện có hàm số mạch dưới đây là mạch lọc dải loại. Tìm $|H(j\omega)|_{MIN}$ và ω_o, ω_{c1}, ω_{c2}

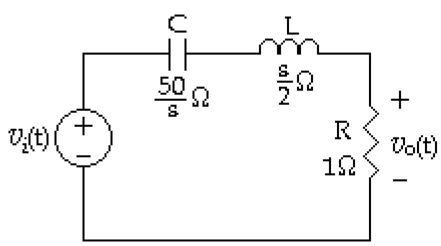
$$\mathbf{H}(s)=\frac{3(s^2+25)}{s^2+s+25}$$

8.3 Mạch (H 8.P3). Xác định $\mathbf{H}(s)=\dfrac{\mathbf{V}_o(s)}{\mathbf{V}_i(s)}$

8.4 Mạch RLC nối tiếp với R=1Ω, L=1/2 H và C=0,02 F (H P8.4).
Xác định $\mathbf{H}(s)=\mathbf{V}_o(s)/\mathbf{V}_i(s)$. Vẽ đáp tuyến tần số của mạch. Xác định ω_o, ở đó biên độ $\mathbf{H}(j\omega)$ cực đại và góc pha bằng 0. Xác định ω_{c1}, ω_{c2}

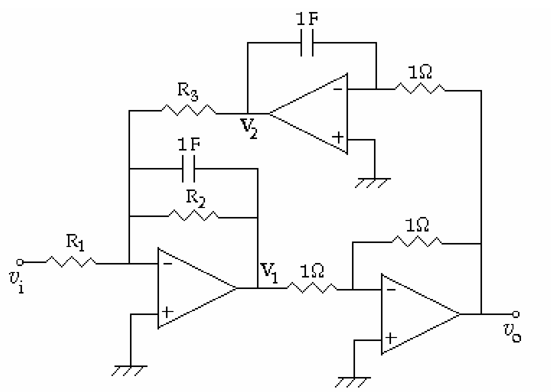


(H P8.3)



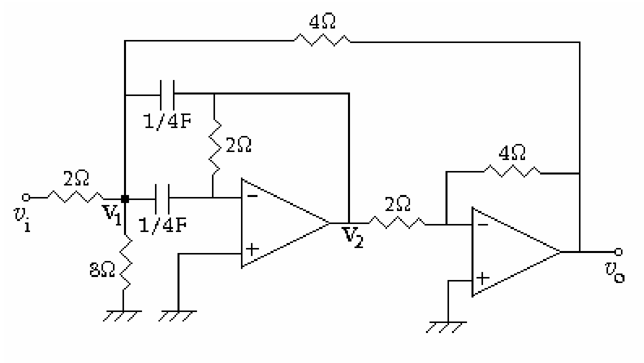
(H P8.4)

8.5 Mạch (H P8.5). Xác định $\mathbf{H}(s)=\mathbf{V}_o(s)/\mathbf{V}_i(s)$ theo R_1, R_2 và R_3.
Chứng tỏ đây là mạch lọc dải thông. Tần số giữa ?
Với giá trị nào của R_1, R_2 và R_3 ta có kết quả giống BT 8.4 ?



(H P8.5)

8.6 Mạch (H P8.6). Xác định **H**(s)=**V**$_o$(s)/**V**$_i$(s).
Chứng tỏ đây là mạch lọc dải thông. Tìm độ lợi, băng thông và tần số giữa ?

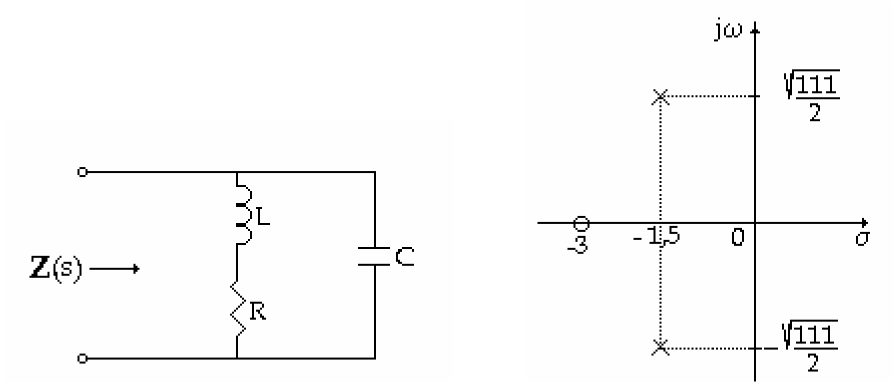


(H P8.6)

8.7 Mạch (H P8.7a). Chứng tỏ Z(s) có dạng:

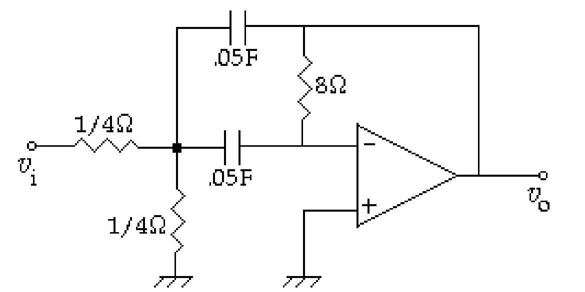
$$\mathbf{Z}(s)=\frac{K(s-z_1)}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

Xác định z_1, p_1 và p_2 theo R, L và C
Nếu Cực và Zero của **Z**(s) có vị trí như (H P8.7b). Tìm R, L và C. Cho **Z**(j0)=1



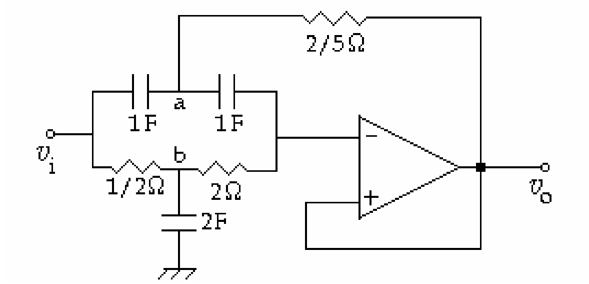
(a) (H P8.7) (b)

8.8 Mạch (H P8.8). Xác định **H**(s)=**V**$_o$(s)/**V**$_i$(s).
Chứng tỏ đây là mạch lọc dải thông. Tìm độ lợi, băng thông và tần số giữa ?
Tỉ lệ hóa mạch sao cho tần số giữa là 20.000 rad/s dùng tụ .01μF.



(H P8.8)

8.9 Mạch (H P8.9). Xác định **H**(s)=**V**$_o$(s)/**V**$_i$(s).
Chứng tỏ đây là mạch lọc dải loại. Tìm độ lợi, tần số giữa và hệ số phẩm?
Tỉ lệ hóa mạch sao cho tần số giữa là f_o=60 Hz dùng tụ 1nF và 2nF.

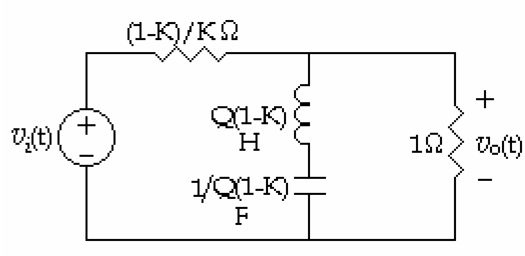


(H P8.9)

8.10 Chứng tỏ hàm số mạch của mạch (H P8.10) cho bởi:

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{V}_2(s)}{\mathbf{V}_1(s)} = \frac{K(s^2+1)}{s^2+1/Qs+1}$$

Và đây là mạch dải loại, có tần số giữa ω_0 = 1 rad/s. Xác định độ rộng dải loại.
Tỉ lệ hóa mạch sao cho tần số giữa là 10^5 rad/s dùng tụ .001μF. Cho Q=5 và K=0,5.



(H P8.10)

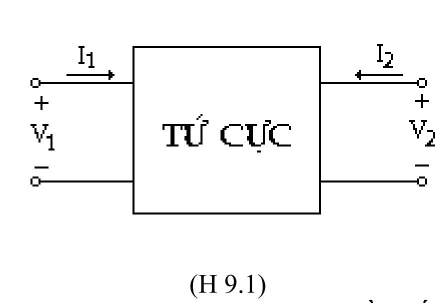
❅ CHƯƠNG 9

TỨ CỰC

Hầu hết các mạch điện và điện tử đều có thể được diễn tả dưới dạng tứ cực, đó là các mạch có 4 cực chia làm 2 cặp cực, một cặp cực gọi là **ngã vào** (nơi nhận tín hiệu vào) và cặp cực kia là **ngã ra**, nơi nối với tải. Nếu trong 2 cặp cực có chung một cực, mạch trở thành 3 cực. Tuy nhiên, dù là mạch 3 cực nhưng vẫn tồn tại 2 ngã vào và ra nên việc khảo sát không có gì thay đổi so với mạch tứ cực.

Chương này đề cập đến một lớp các hàm số mạch đặc trưng cho tứ cực. Các hàm số mạch này có khác với các hàm số mạch trước đây ở chỗ là được xác định trong điều kiện nối tắt hoặc để hở một trong 2 cặp cực (ngã vào hoặc ngã ra)

9.1 QUAN HỆ GIỮA CÁC BIẾN SỐ CỦA TỨ CỰC



(H 9.1)

Để khảo sát tứ cực, ta dùng các đại lượng trong lãnh vực tần số.
Có 4 biến số liên quan đến tứ cực, đó là hiệu thế và dòng điện ở các ngã vào và ra.
Gọi $V_1(s)$, $I_1(s)$ là hiệu thế và dòng điện ngã vào
Gọi $V_2(s)$, $I_2(s)$ là hiệu thế và dòng điện ngã ra
Trong 4 biến số trên có 2 là biến độc lập, các biến khác được xác định theo 2 biến này.
Tùy theo cách chọn biến độc lập mà ta có các thông số khác nhau để diễn tả mạch

Tên gọi thông số	Biến số độc lập	Hàm số	Phương trình

Tổng trở mạch hở	I_1, I_2	V_1, V_2	$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2$ $V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2$
Tổng dẫn mạch nối tắt	V_1, V_2	I_1, I_2	$I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2$ $I_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2$
Truyền	V_2, I_2	V_1, I_1	$V_1 = AV_2 - BI_2$ $I_1 = CV_2 - DI_2$
Truyền ngược	V_1, I_1	V_2, I_2	$V_2 = A'V_1 - B'I_1$ $I_2 = C'V_1 - D'I_1$
Hỗn tạp	V_2, I_1	V_1, I_2	$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2$ $I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2$
Hỗn tạp ngược	V_1, I_2	V_2, I_1	$I_1 = g_{11}V_1 + g_{12}I_2$ $V_2 = g_{21}V_1 + g_{22}I_2$

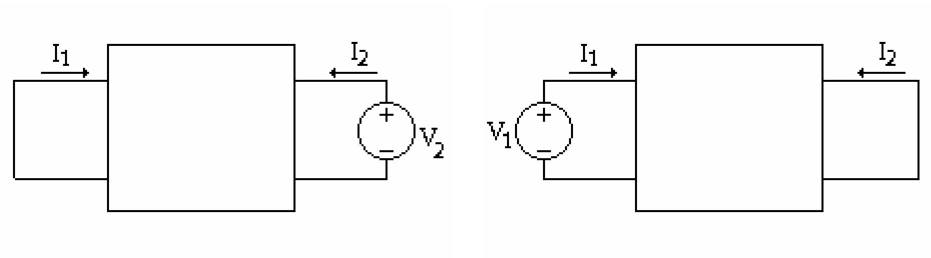
Bảng 9.1 Các loại thông số và phương trình tương ứng

9.2 THÔNG SỐ TỔNG DẪN MẠCH NỐI TẮT (Short-circuit admittance parameter)

Đây là loại thông số có thứ nguyên của tổng dẫn và khi xác định cần nối tắt một trong các ngã vào hoặc ra.

Phương trình diễn tả tứ cực bằng thông số tổng dẫn mạch nối tắt

$$\begin{aligned} I_1 &= y_{11}V_1 + y_{12}V_2 \\ I_2 &= y_{21}V_1 + y_{22}V_2 \end{aligned} \quad \text{hay} \quad \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \qquad (9.1)$$



(a) (H 9.2) (b)

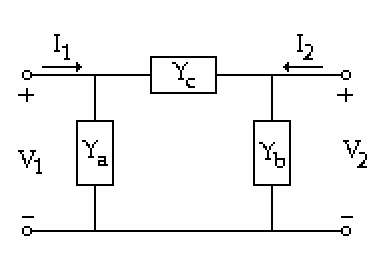
Để xác định các thông số y, cho V_1=0 (nối tắt ngã vào) (H 9.2a) hoặc V_2=0 (nối tắt ngã ra) (H 9.2b)

$$y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0} \qquad y_{12} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0} \qquad y_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0} \qquad y_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0}$$

Nếu mạch thuận nghịch $y_{12} = y_{21}$

Thí dụ 9.1

Xác định các thông số y của mạch (H 9.3)



(H 9.3)

Lần lượt nối tắt các ngã vào và ra, ta có thể xác định thông số y một cách trực quan

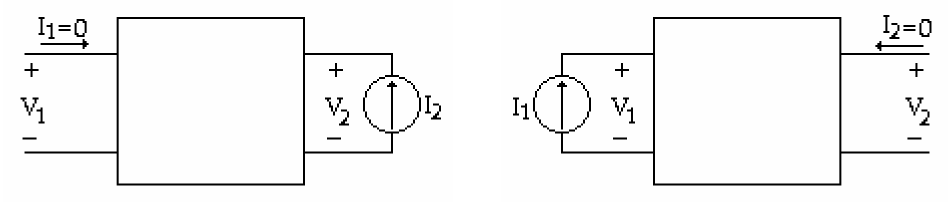
$$y_{11} = Y_a + Y_c$$
$$y_{12} = y_{21} = -Y_c$$
$$y_{22} = Y_b + Y_c$$

9.3 THÔNG SỐ TỔNG TRỞ MẠCH HỞ (Open-circuit impedance parameter)

Đây là loại thông số có thứ nguyên của tổng trở và khi xác định cần để hở một trong các ngã vào hoặc ra.

Phương trình diễn tả tứ cực bằng thông số tổng trở mạch hở.

$$\begin{aligned} V_1 &= z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \\ V_2 &= z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \end{aligned} \quad \text{hay} \quad \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \qquad (9.2)$$



(a) (H 9.4) (b)

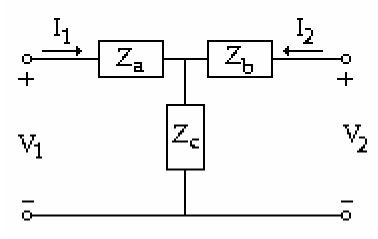
Để xác định các thông số z, cho I_1=0 (để hở ngã vào) hoặc I_2=0, nghĩa là (H 9.4a) (để hở ngã ra) (H 9.4b)

$$z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0} \qquad z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0} \qquad z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} \qquad z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0}$$

Nếu mạch thuận nghịch $z_{12} = z_{21}$

Thí dụ 9.2

Xác định các thông số z của mạch (H 9.5)



(H 9.5)

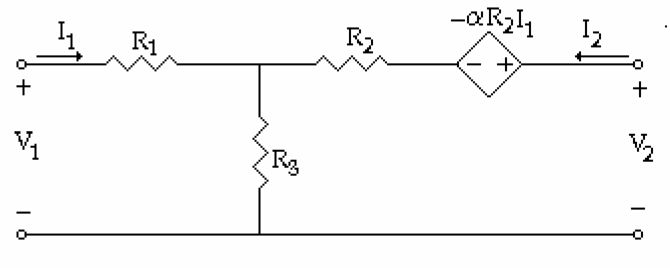
-

Các thông số z cũng xác định được một cách trực quan bằng cách để hở các ngã vào và ra

$$z_{11} = Z_a + Z_c$$
$$z_{12} = z_{21} = Z_c$$
$$z_{22} = Z_b + Z_c$$

Thí dụ 9.3

Xác định các thông số z của mạch (H 9.6). Đây là mạch tương đương của transistor ráp cực nền chung



(H 9.6)

Viết phương trình vòng cho mạch

$V_1=(R_1+R_3)I_1+R_3I_2$ (1)

$V_2=(\alpha R_2+R_3)I_1+(R_2+R_3)I_2$ (2)

Suya ra

$z_{11}= R_1+R_3$

$z_{12}= R_3$

$z_{21}= \alpha R_2+R_3$

$z_{22}= R_2+R_3$

Do mạch có chứa nguồn phụ thuộc nên không có tính thuận nghịch, kết quả $z_{12} \neq z_{21}$

9.3.1 Quan hệ giữa thông số y và z

Giải hệ phương trình (9.1) để tính V_1 và V_2 theo I_1 và I_2

$$V_1 = \frac{y_{22}}{\Delta y} I_1 + \frac{-y_{12}}{\Delta y} I_2$$

$$V_2 = \frac{-y_{21}}{\Delta y} I_1 + \frac{y_{11}}{\Delta y} I_2$$

Với $\Delta y = y_{11}.y_{22} - y_{12}.y_{21} = \det[Y]$

Suy ra

$$z_{11} = \frac{y_{22}}{\Delta y} \qquad z_{12} = -\frac{y_{12}}{\Delta y} \qquad z_{21} = -\frac{y_{21}}{\Delta y} \qquad z_{22} = \frac{y_{11}}{\Delta y} \qquad (9.3)$$

Giải hệ phương trình (9.2) để tính I_1 và I_2 theo V_1 và V_2

$$I_1 = \frac{z_{22}}{\Delta z} V_1 + \frac{-z_{12}}{\Delta z} V_2$$

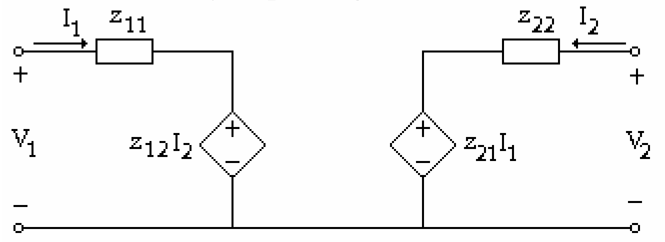
$$I_2 = \frac{-z_{21}}{\Delta z} V_1 + \frac{z_{11}}{\Delta z} V_2$$

Suy ra

$$y_{11} = \frac{z_{22}}{\Delta z} \qquad y_{12} = -\frac{z_{12}}{\Delta z} \qquad y_{21} = -\frac{z_{21}}{\Delta z} \qquad y_{22} = \frac{z_{11}}{\Delta z} \qquad (9.4)$$

9.3.2 Thay một mạch thật bằng một tứ cực

Từ các phương trình diễn tả mạch bằng các thông số của tứ cực ta có thay một mạch bằng tứ cực chỉ chứa nguồn và các thông số tương ứng
Với thông số z, ta có mạch (H 9.7) suy từ phương trình (9.2)



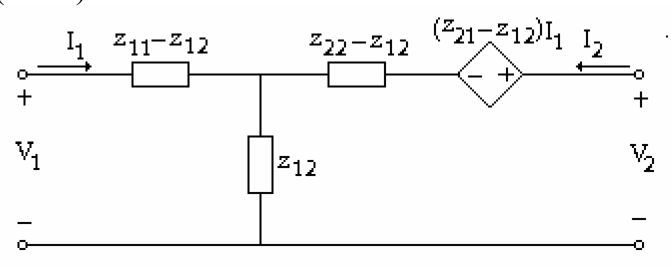
(H 9.7)

Để có mạch chỉ chứa một nguồn phụ thuộc, ta có thể viết lại (9.2)

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2$$

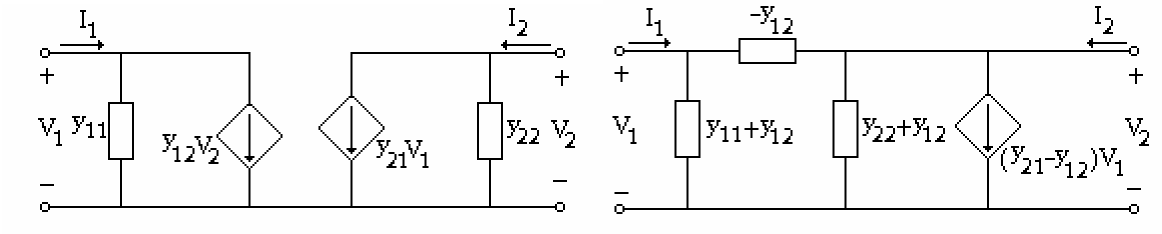
$$V_2 = z_{12}I_1 + z_{22}I_2 + (z_{21} - z_{12})I_1$$

Và mạch tương ứng (H 9.8)



(H 9.8)

Tương tự, cho trường hợp thông số y, ta có các mạch tương đương sau (H 9.9a) và (H 9.9b)



(a) (H 9.9) (b)

9.4 THÔNG SỐ TRUYỀN (Transmission parameter)

9.4.1 Thông số truyền

Thông số truyền được dùng để diễn tả mối quan hệ giữa hiệu thế và dòng điện ở một cặp cực và hiệu thế và dòng điện ở cặp cực kia.

$$\begin{aligned} V_1 &= AV_2 - BI_2 \\ I_1 &= CV_2 - DI_2 \end{aligned} \quad \text{hay} \quad \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \qquad (9.5)$$

A, B, C, D gọi là thông số truyền, đôi khi còn được gọi là **thông số chuỗi** (chain parameter) hoặc đơn giản hơn, có thể gọi là thông số **ABCD**

Dấu - trong 2 thông số B và D có từ qui ước dấu của I_2. (lần đầu tiên thông số này được dùng để giải bài toán dây truyền sóng, dòng điện trên dây truyền có chiều ngược lại I_2).

Các thông số ABCD được xác định trong điều kiện mạch hở hoặc nối tắt.

$$\frac{1}{A}=\left.\frac{V_2}{V_1}\right|_{I_2=0}$$ (Độ lợi hiệu thế mạch hở)

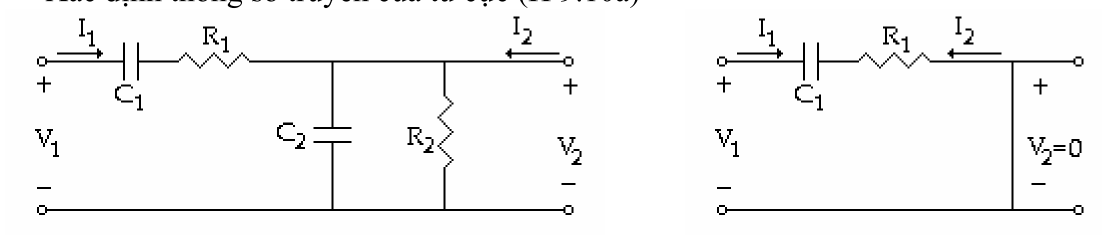
$$-\frac{1}{B}=\left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0}$$ (Tổng dẫn truyền mạch nối tắt)

$$\frac{1}{C}=\left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0}$$ (Tổng trở truyền mạch hở)

$$-\frac{1}{D}=\left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_2=0}$$ (Độ lợi dòng điện mạch nối tắt)

Thí dụ 9.4

Xác định thông số truyền của tứ cực (H 9.10a)



(a) (H 9.10) (b)

Hai thông số A và C được xác định từ mạch với ngã ra để hở ($I_2 = 0$) (H 9.10a)

$$A=\frac{V_1}{V_2}=\frac{\dfrac{1}{sC_1}+R_1+\dfrac{\dfrac{1}{sC_2}R_2}{\dfrac{1}{sC_2}+R_2}}{\dfrac{\dfrac{1}{sC_2}R_2}{\dfrac{1}{sC_2}+R_2}}$$

$$=\frac{(1+sC_1R_1)(1+sC_2R_2)+sC_1R_2}{sC_1R_2}$$

$$C=\frac{I_1}{V_2}=sC_2+\frac{1}{R_2}=\frac{sC_2R_2+1}{R_2}$$

Thông số B và D được xác định từ mạch với ngã ra nối tắt ($V_2 = 0$) (H 9.10b)

$$B=-\frac{V_1}{I_2}=-\left(\frac{1}{sC}+R_1\right)=-\frac{sC_1R_1+1}{sC_1}$$

$$D=-\frac{I_1}{I_2}=1$$

9.4.2 Thông số truyền ngược (Inverse transmission parameter)

Nếu xác định V_2 và I_2 theo V_1 và I_1 ta có thông số truyền ngược, hay A'B'C'D'

$$\begin{aligned}V_2&=A'V_1-B'I_1\\ I_2&=C'V_1-D'I_1\end{aligned}\quad \text{hay}\quad \begin{bmatrix}V_2\\ I_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A' & B'\\ C' & D'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\ -I_1\end{bmatrix}\qquad (9.6)$$

9.4.3 Quan hệ giữa các thông số truyền và thông số z

Bằng cách giải các hệ phương trình liên quan ta có mối quan hệ giữa các thông số với nhau. Dưới đây là quan hệ giữa thông số ABCD và z

$$A=\frac{z_{11}}{z_{21}} \qquad B=\frac{\Delta z}{z_{21}} \qquad C=\frac{1}{z_{21}} \qquad D=\frac{z_{22}}{z_{21}} \qquad (9.7)$$

Từ các phương trình (9.7) suy ra $AD-BC=\frac{z_{12}}{z_{21}}$ (9.8)

Nếu mạch thuận nghịch $z_{12}=z_{21} \Rightarrow AD-BC=1$ (9.9)

9.5 THÔNG SỐ HỖN TẠP (Hybrid parameter)

9.5.1 Thông số h

Đây là loại thông số thường được dùng trong các mạch tương đương của các mạch điện tử, do các thông số này có thể đo được dễ dàng trong phòng thí nghiệm.

Phương trình diễn tả mạch bằng thông số h

$$\begin{aligned} V_1 &= h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_2 &= h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \end{aligned} \quad \text{hay} \quad \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \qquad (9.10)$$

$h_{11}=\left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{V_2=0}$ (Tổng trở vào mạch nối tắt)

$h_{12}=\left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_1=0}$ (Nghịch đảo độ lợi hiệu thế mạch hở)

$h_{21}=\left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_2=0}$ (Độ lợi dòng điện mạch nối tắt)

$h_{22}=\left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{I_1=0}$ (Tổng dẫn ra mạch hở)

9.5.2 Thông số g

Nghịch đảo của thông số h là thông số g

$$\begin{aligned} I_1 &= g_{11}V_1 + g_{12}I_2 \\ V_2 &= g_{21}V_1 + g_{22}I_2 \end{aligned} \quad \text{hay} \quad \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \qquad (9.11)$$

$g_{11}=\left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{I_2=0}$ (Tổng dẫn vào mạch hở)

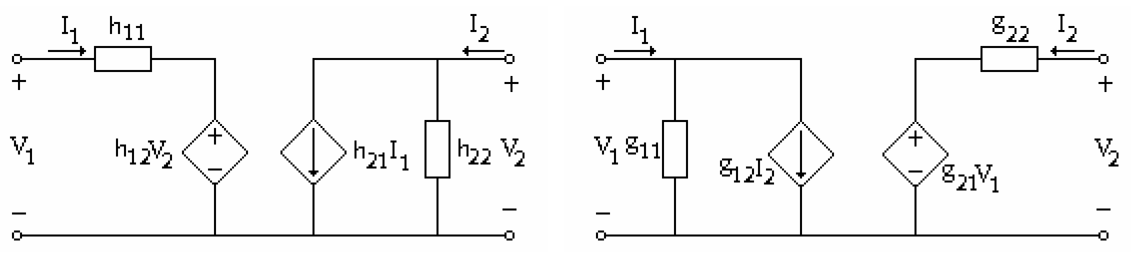
$g_{12}=\left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{V_1=0}$ (Nghịch đảo độ lợi dòng điện mạch nối tắt)

-

$$g_{21} = \left.\frac{V_2}{V_1}\right|_{I_2=0}$$ (Độ lợi điện thế mạch hở)

$$g_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{V_1=0}$$ (Tổng trở ra mạch nối tắt)

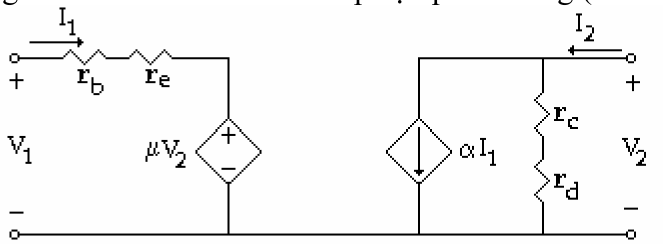
Mạch điện biểu diễn bởi thông số h và g (H 9.11)



(H 9.11)

Thí dụ 9.5

Xác định thông số h của mẫu transistor ráp cực phát chung (H 9.12)



(H 9.12)

Viết KVL cho phần mạch bên trái và KCL cho phần mạch bên phải

$$V_1 = (r_b + r_e)I_1 + \mu V_2$$

$$I_2 = \alpha I_1 + \frac{1}{r_c + r_d}V_2$$

Suy ra $h_{11}=r_b+r$

$h_{12}= \mu$

$h_{21}= \alpha$

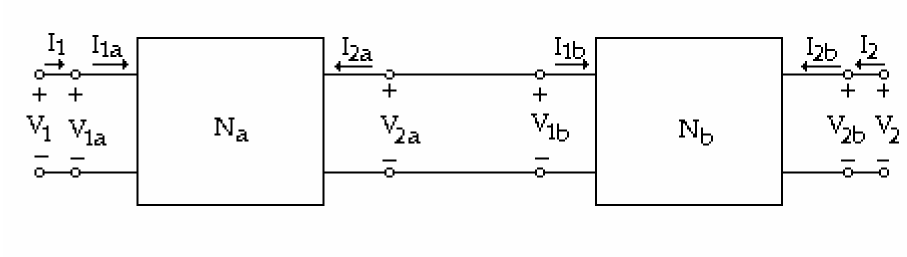
$$h_{22} = \frac{1}{r_d + r_e}$$

9.6 GHÉP TỨ CỰC

Một mạch điện phức tạp có thể xem như gồm nhiều tứ cực đơn giản ghép lại theo cách nào đó.

Sau đây là vài cách ghép phổ biến

9.6.1 Ghép chuỗi (H 9.13)



(H 9.13)

Trong cách ghép này thông số ABCD được dùng tiện lợi nhất. Ap dụng cho 2 tứ cực N_a và N_b

$$\begin{bmatrix} V_{1a} \\ I_{1a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{2a} \\ -I_{2a} \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad \begin{bmatrix} V_{1b} \\ I_{1b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{2b} \\ -I_{2b} \end{bmatrix}$$

Xem mạch điện tương đương với một tứ cực duy nhất thì:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

Để ý là:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{1a} \\ I_{1a} \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} V_{2a} \\ -I_{2a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{1b} \\ I_{1b} \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad \begin{bmatrix} V_{2b} \\ -I_{2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

Ta được kết quả

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix} \qquad (9.12)$$

Có kết quả với thông số ABCD ta có thể đổi ra thông số khác từ bảng biến đổi (bảng 9.2).

Giả sử ta cần tính thông số z của tứ cực tương đương theo thông số z của các tứ cực thành viên ta làm như sau: (thí dụ tính z_{11})

Từ bảng (9.2)

$$z_{11} = \frac{A}{C}$$

Thay A và C từ phép nhân ma trận

$$z_{11} = \frac{A_a.A_b + B_a.C_b}{C_a.A_b + D_a.C_b}$$

Từ bảng (9.2), thay các trị A_a, A_b . . . . bằng các thông số z_a, z_b,. . . tương ứng

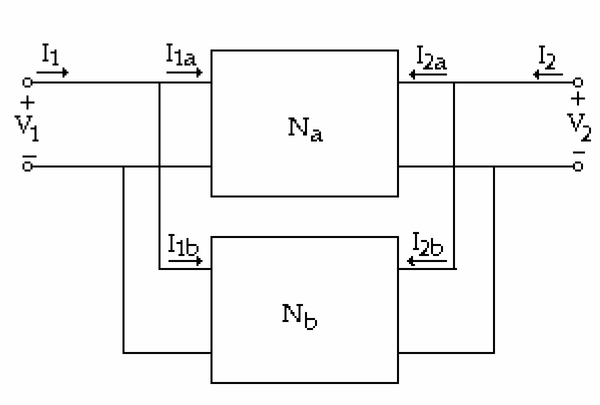
$$z_{11} = \frac{\dfrac{z_{11a}}{z_{21a}}\dfrac{z_{11b}}{z_{21b}} + \dfrac{\Delta_{za}}{z_{21a}}\dfrac{1}{z_{21b}}}{\dfrac{1}{z_{21a}}\dfrac{z_{11b}}{z_{21b}} + \dfrac{z_{22a}}{z_{21a}}\dfrac{1}{z_{21b}}}$$

Sau khi đơn giản

$$z_{11} = z_{11a} - \frac{z_{21a}.z_{12a}}{z_{22a} + z_{11b}}$$

9.6.2 Ghép song song (H 9.14)

Các ngã vào và ra của tứ cực ghép song song với nhau



(H 9.14)

Trong cách ghép song song các hiệu thế ngã vào và ra của các tứ cực bằng nhau và bằng hiệu thế ngã vào và ra của các tứ cực thành viên. Dòng điện ở các ngã của tứ cực tương đương bằng tổng các dòng điện ở các ngã của tứ cực thành viên

Dùng thông số tổng dẫn mạch nối tắt

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{1a} \\ I_{2a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{1b} \\ I_{2b} \end{bmatrix}$$

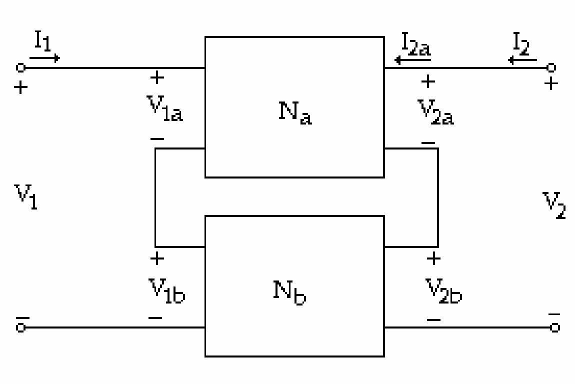
$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11a} & y_{12a} \\ y_{21a} & y_{22a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_{1a} \\ V_{2a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_{11b} & y_{12b} \\ y_{21b} & y_{22b} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_{1b} \\ V_{2b} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11a}+y_{11b} & y_{12a}+y_{12b} \\ y_{21a}+y_{21b} & y_{22a}+y_{22b} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Hai tứ cực ghép song song tương đương với một tứ cực có ma trận tổng dẫn mạch nối tắt bằng tổng các ma trận tổng dẫn mạch nối tắt của các tứ cực thành viên

$$[Y\}=[Y_a]+[Y_b] \qquad (9.13)$$

9.6.3 Ghép nối tiếp , còn gọi là ghép chồng (H 9.15)



(H 9.15)

-

Trong cách ghép nối tiếp các dòng điện ở ngã vào và ra của các tứ cực bằng nhau và bằng các dòng điện ở ngã vào và ra của các tứ cực thành viên . Hiệu thế ở các ngã của tứ cực tương đương bằng tổng hiệu thế các ngã của tứ cực thành viên.

Dùng thông số tổng trở mạch hở

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{1a} \\ V_{2a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{1b} \\ V_{2b} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11a} & z_{12a} \\ z_{21a} & z_{22a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{1a} \\ I_{2a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_{11b} & z_{12b} \\ z_{21b} & z_{22b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{1b} \\ I_{2b} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11a} + z_{11b} & z_{12a} + z_{12b} \\ z_{21a} + z_{21b} & z_{22a} + z_{22b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Hai tứ cực ghép nối tiếp tương đương với một tứ cực có ma trận tổng trở mạch hở bằng tổng các ma trận tổng trở mạch hở của các tứ cực thành viên

$$[Z\}=[Z_a]+[Z_b] \qquad (9.14)$$

	[z]	[y]	[T]	[T']	[h]	[g]
[z]	$\begin{matrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{y_{22}}{\Delta y} & \frac{-y_{12}}{\Delta y} \\ \frac{-y_{21}}{\Delta y} & \frac{y_{11}}{\Delta y} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A}{C} & \frac{\Delta T}{C} \\ \frac{1}{C} & \frac{D}{C} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D'}{C'} & \frac{1}{C'} \\ \frac{\Delta T'}{C'} & \frac{A'}{C'} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta h}{h_{22}} & \frac{h_{12}}{h_{22}} \\ \frac{-h_{21}}{h_{22}} & \frac{1}{h_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{g_{11}} & \frac{-g_{12}}{g_{11}} \\ \frac{g_{21}}{g_{11}} & \frac{\Delta g}{g_{11}} \end{matrix}$
[y]	$\begin{matrix} \frac{z_{22}}{\Delta z} & \frac{-z_{12}}{\Delta z} \\ \frac{-z_{21}}{\Delta z} & \frac{z_{11}}{\Delta z} \end{matrix}$	$\begin{matrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D}{B} & \frac{-\Delta T}{B} \\ \frac{-1}{B} & \frac{A}{B} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A'}{B'} & \frac{-1}{B'} \\ \frac{-\Delta T'}{B'} & \frac{D'}{B'} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h_{11}} & \frac{-h_{12}}{h_{11}} \\ \frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{\Delta h}{h_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta g}{g_{22}} & \frac{g_{12}}{g_{22}} \\ \frac{-g_{21}}{g_{22}} & \frac{1}{g_{22}} \end{matrix}$
[T]	$\begin{matrix} \frac{z_{11}}{z_{21}} & \frac{\Delta z}{z_{21}} \\ \frac{1}{z_{21}} & \frac{z_{22}}{z_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{y_{22}}{y_{21}} & -\frac{1}{y_{21}} \\ -\frac{\Delta y}{y_{21}} & -\frac{y_{11}}{y_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D'}{\Delta T'} & \frac{B'}{\Delta T'} \\ \frac{C'}{\Delta T'} & \frac{A'}{\Delta T'} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{\Delta h}{h_{21}} & -\frac{h_{11}}{h_{21}} \\ -\frac{h_{22}}{h_{21}} & -\frac{1}{h_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{g_{21}} & \frac{g_{22}}{g_{21}} \\ \frac{g_{11}}{g_{21}} & \frac{\Delta g}{g_{21}} \end{matrix}$
[T']	$\begin{matrix} \frac{z_{22}}{z_{12}} & \frac{\Delta z}{z_{12}} \\ \frac{1}{z_{12}} & \frac{z_{11}}{z_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{y_{11}}{y_{12}} & -\frac{1}{y_{12}} \\ -\frac{\Delta y}{y_{12}} & -\frac{y_{22}}{y_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D}{\Delta T} & \frac{B}{\Delta T} \\ \frac{C}{\Delta T} & \frac{A}{\Delta T} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A' & B' \\ C' & D' \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h_{12}} & \frac{h_{11}}{h_{12}} \\ \frac{h_{22}}{h_{12}} & \frac{\Delta h}{h_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{-\Delta g}{g_{12}} & \frac{-g_{22}}{g_{12}} \\ \frac{-g_{11}}{g_{12}} & \frac{-1}{g_{12}} \end{matrix}$
[h]	$\begin{matrix} \frac{\Delta z}{z_{22}} & \frac{z_{12}}{z_{22}} \\ \frac{-z_{21}}{z_{22}} & \frac{1}{z_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{y_{11}} & \frac{-y_{12}}{y_{11}} \\ \frac{y_{21}}{y_{11}} & \frac{\Delta y}{y_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{B}{D} & \frac{\Delta T}{D} \\ \frac{-1}{D} & \frac{C}{D} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{B'}{A'} & \frac{1}{A'} \\ \frac{-\Delta T'}{A'} & \frac{C'}{A'} \end{matrix}$	$\begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{g_{22}}{\Delta g} & \frac{-g_{12}}{\Delta g} \\ \frac{-g_{21}}{\Delta g} & \frac{g_{11}}{\Delta g} \end{matrix}$
[g]	$\begin{matrix} \frac{1}{z_{11}} & \frac{-z_{12}}{z_{11}} \\ \frac{z_{21}}{z_{11}} & \frac{\Delta z}{z_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta y}{y_{22}} & \frac{y_{12}}{y_{22}} \\ \frac{-y_{21}}{y_{22}} & \frac{1}{y_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{C}{A} & \frac{-\Delta T}{A} \\ \frac{1}{A} & \frac{B}{A} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{C'}{D'} & \frac{-1}{D'} \\ \frac{\Delta T'}{D'} & \frac{B'}{D'} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{h_{22}}{\Delta h} & \frac{-h_{12}}{\Delta h} \\ \frac{-h_{21}}{\Delta h} & \frac{h_{11}}{\Delta h} \end{matrix}$	$\begin{matrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{matrix}$

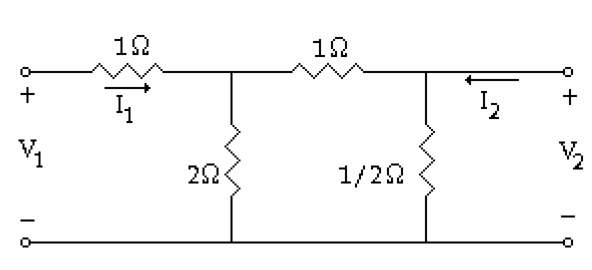
Bảng 9.2 Biến đổi giữa các thông số của tứ cực

-

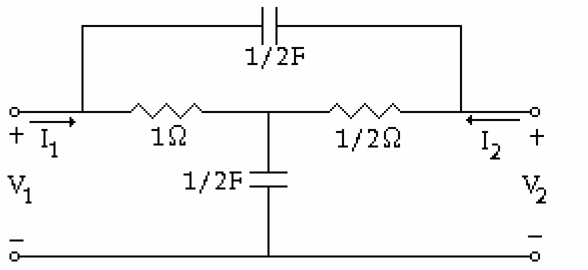
BÀI TẬP

--o❁o--

9.1 Xác định thông số y và z của tứ cực (H P9.1)
9.2 Xác định thông số y và z của mạch cầu T (H P9.2)

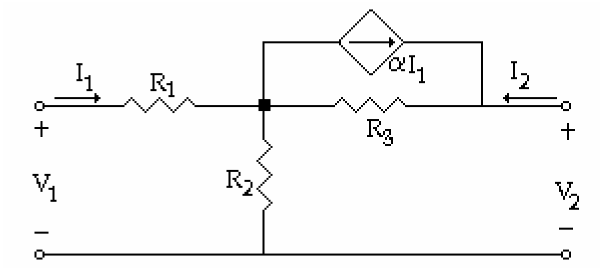


(H P9.1)

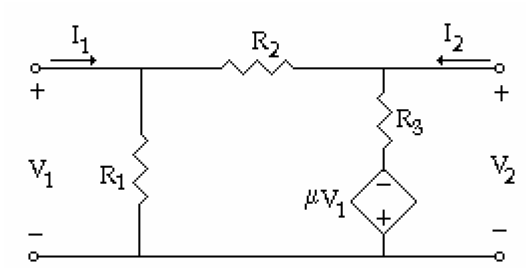


(H P9.2)

9.3 Xác định thông số h của mạch tương đương của Transistor (H P9.3)
9.4 Xác định thông số y của mạch (H P9.4) bằng cách xem mạch gồm 2 tứ cực mắc song song



(H P9.3)

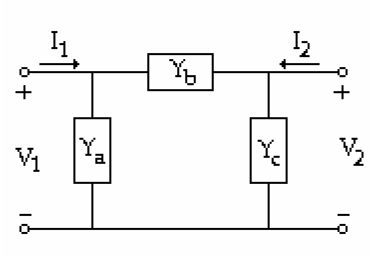


(H P9.4)

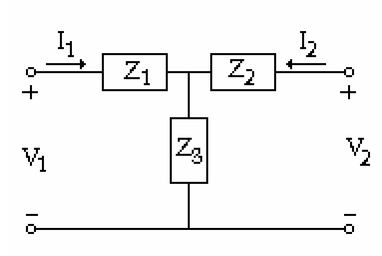
9.5 Cho 2 tứ cực hình Π và hình T (H P9.5a) và (H P9.5b).
a. Chứng minh rằng điều kiện để 2 tứ cực này tương đương là:

$$Y_a = \frac{Z_2}{\Delta Z}; \qquad Y_b = \frac{Z_3}{\Delta Z}; \qquad Y_c = \frac{Z_1}{\Delta Z}$$

Trong đó $\Delta Z = Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1$
b. Tính Z_1, Z_2 và Z_3 theo Y_a, Y_b và Y_c



(H P9.5a)

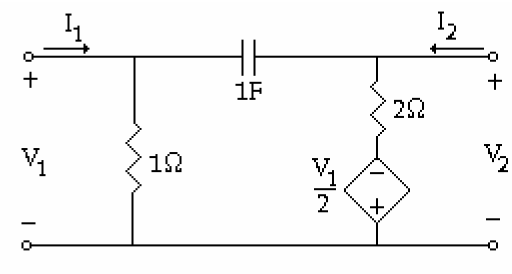


(H P9.5b).

9.6
a. Xác định thông số y của tứ cực (H P9.6)

-

b. Mắc vào ngã ra của tứ cực điện trở 1Ω. Xác định **H**(s) = $\frac{\mathbf{V}_2(s)}{\mathbf{V}_1(s)}$



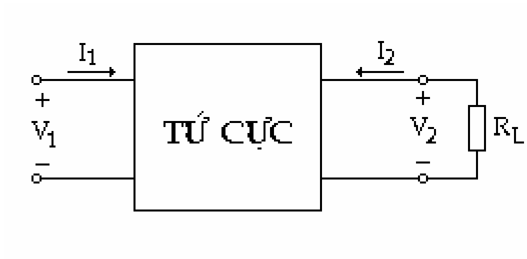
(H P9.6)

9.7 Giải lại bài tập 9.6 bằng cách dùng thông số truyền

9.8 Cho tứ cực, ghép điện trở tải R_L vào ngã ra (H P9.8). Chứng minh rằng:

a. $\mathbf{Z}_{21}(s) = \frac{\mathbf{V}_2(s)}{\mathbf{I}_1(s)} = \frac{z_{21}R_L}{z_{22} + R_L}$

b. $\mathbf{Y}_{21}(s) = \frac{\mathbf{I}_2(s)}{\mathbf{V}_1(s)} = \frac{y_{21}G_L}{y_{22} + G_L}$

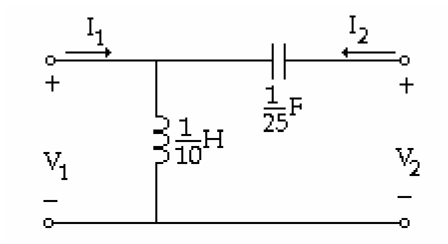


(H P9.8)

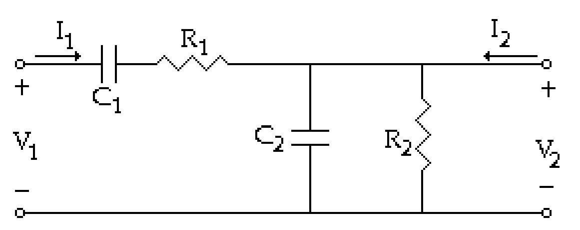
9.9 **a.** Xác định thông số y và z của tứ cực (H P9.9)

b. Mắc vào ngã vào tứ cực một nguồn dòng $i_1(t) = 15e^{-5t}\cos 10t$ (A) và ngã ra với tải R_L = 1Ω. Xác định $v_2(t)$.

9.10 Xác định thông số z của tứ cực (H P9.10). Suy ra **H**(s) = $\frac{\mathbf{V}_2(s)}{\mathbf{V}_1(s)}$ khi mắc vào ngã vào một nguồn $v_1(t)$ và để hở ngã ra



(H P9.9)



(H P9.10)

✷ CHƯƠNG 10

PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

✷ DẪN NHẬP

✷ **PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE**
- Phép biến đổi Laplace
- Phép biến đổi Laplace ngược

✷ **CÁC ĐỊNH LÝ CƠ BẢN CỦA PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE**

✷ **ÁP DỤNG VÀO GIẢI MẠCH**

✷ **CÁC PHƯƠNG PHÁP TRIỂN KHAI HÀM P(S)/Q(S)**
- Triển khai từng phần
- Công thức Heaviside

✷ **ĐỊNH LÝ GIÁ TRỊ ĐẦU VÀ GIÁ TRỊ CUỐI**
- Định lý giá trị đầu
- Định lý giá trị cuối

✷ **MẠCH ĐIỆN BIẾN ĐỔI**
- Điện trở
- Cuộn dây
- Tụ điện

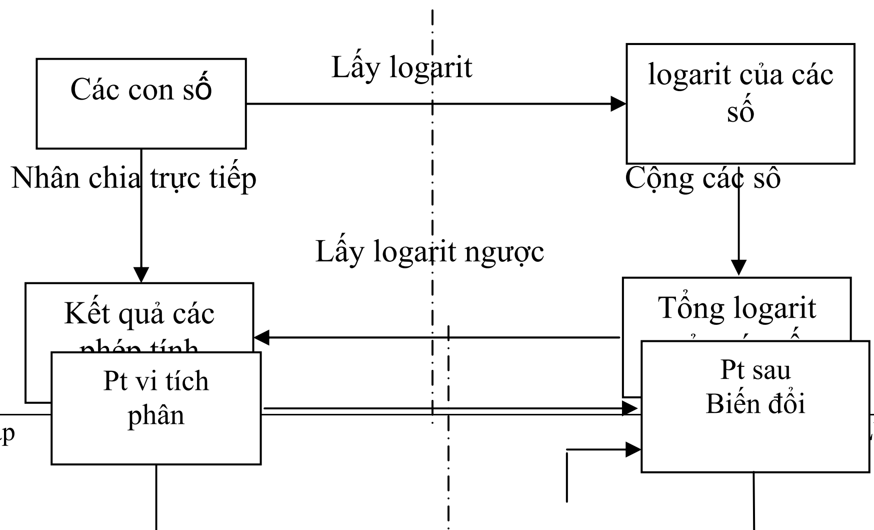
10.1 DẪN NHẬP

Phép biến đổi Laplace, một công cụ toán học giúp giải các phương trình vi phân, được sử dụng đầu tiên bởi Oliver Heaviside (1850-1925), một kỹ sư người Anh, để giải các mạch điện.

So với phương pháp cổ điển, phép biến đổi Laplace có những thuận lợi sau:
* Lời giải đầy đủ, gồm đáp ứng tự nhiên và đáp ứng ép, trong một phép toán.
* Không phải bận tâm xác định các hằng số tích phân. Do các điều kiện đầu đã được đưa vào phương trình biến đổi, là phương trình đại số, nên trong lời giải đầy đủ đã chứa các hằng số.

Về phương pháp, phép biến đổi Laplace tương tự với một phép biến đổi rất quen thuộc: phép tính logarit

(H 10.1) cho ta so sánh sơ đồ của phép tính logarit và phép biến đổi Laplace



Biến đổi Laplace

Phép giải cổ điển Đk đầu Phép tính đại số
Đk đầu

Biến đổi Laplace ngược

lãnh vực thời gian Lãnh vực tần số

(H 10.1)

Để làm các phép tính nhân, chia, lũy thừa . . . của các con số bằng phép tính logarit ta thực hiện các bước:

1. Lấy logarit các con số
2. Làm các phép toán cộng, trừ trên logarit của các con số
3. Lấy logarit ngược để có kết quả cuối cùng.

Thoạt nhìn, việc làm có vẻ như phức tạp hơn nhưng thực tế, với những bài toán có nhiều số mã, ta sẽ tiết kiệm được rất nhiều thời gian vì có thể sử dụng các bảng lập sẵn (bảng logarit) khi biến đổi. Hãy thử tính $1{,}4356^{0{,}123789}$ mà không dùng logarit.

Trong bài toán giải phương trình vi tích phân dùng phép biến đổi Laplace ta cũng thực hiện các bước tương tự:

1. Tính các biến đổi Laplace của các số hạng trong phương trình. Các điều kiện đầu được đưa vào
2. Thực hiện các phép toán đại số.
3. Lấy biến đổi Laplace ngược để có kết quả cuối cùng.

Giống như phép tính logarit, ở các bước 1 và 3 nhờ sử dụng các bảng lập sẵn chúng ta có thể giải quyết các bài toán khá phức tạp một cách dễ dàng và nhanh chóng.

10.2 PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

10.2.1 Phép biến đổi Laplace

Hàm f(t) xác định với mọi t>0. Biến đổi Laplace của f(t), được định nghĩa

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t).e^{-st}dt \qquad (10.1)$$

s có thể là số thực hay số phức. Trong mạch điện $s=\sigma+j\omega$

Toán tử $\mathcal{L}$ thay cho cụm từ 'biến đổi Laplace của"

Điều kiện đủ để f(t) có thể biến đổi được là

$$\int_0^\infty |f(t)|.e^{-\delta t}dt < \infty \qquad (10.2)$$

δ là số thực, dương.

Điều kiện này hầu như được thỏa đối với những hàm f(t) gặp trong mạch điện. Vì $e^{-\delta t}$ là hàm mũ giảm khi t tăng nên khi nhân với |f(t)| ta cũng được kết quả tương tự.

Thí dụ, với hàm f(t)=t^n, dùng qui tắc Hospital, người ta chứng minh được

$$\lim_{t\to\infty} t^n e^{-\delta t} = 0, \quad \delta > 0$$

Với n=1, ta có

$$\int_0^\infty t.e^{-\delta t}dt = \frac{1}{\delta^2}, \quad \delta > 0$$

Với giá trị khác của n, tích phân trên cũng xác định với $\delta \neq 0$

Có những hàm dạng e^{at^n} không thỏa điều kiện (10.2) nhưng trong thực tế với những kích thích có dạng như trên thì thường đạt trị bảo hòa sau một khoảng thời gian nào đó.

Thí dụ $v(t)= \begin{cases} e^{at^2} & ,0 \le t \le t_0 \\ K & , \quad t > t_0 \end{cases}$

$v(t)$ trong điều kiện này thỏa (10.2)

Ta nói toán tử $\mathcal{L}$ biến đổi hàm f(t) trong lãnh vực thời gian sang hàm F(s) trong lãnh vực tần số phức. Hai hàm f(t) và F(s) làm thành một cặp biến đổi

Thí dụ 10.1

Tìm biến đổi Laplace của hàm nấc đơn vị

$$u(t) = \begin{cases} 1 & ,t \ge 0 \\ 0 & ,t < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[u(t)] = \int_0^\infty e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s}$$

Nếu f(t)=Vu(t) $\Rightarrow \mathcal{L}[Vu(t)] = \dfrac{V}{s}$

Thí dụ 10.2

Tìm biến đổi Laplace của f(t) = e^{-at}, a là hằng số

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \int_0^\infty e^{-at}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(a+s)t}dt$$

$$= -\frac{1}{s+a}e^{-(a+s)t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s+a}$$

Kết quả của 2 thí dụ trên cho một bảng nhỏ gồm 2 cặp biến đổi

f(t)	F(s)
u(t)	$\frac{1}{s}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$

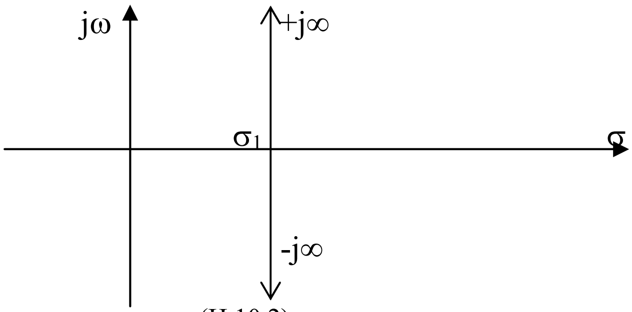
Bằng cách tính biến đổi của một số hàm quen thuộc, ta sẽ xây dựng được một bảng dùng để tra sau này.

10.2.2 Phép biến đổi Laplace ngược

Phép biến đổi Laplace ngược được định nghĩa

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}F(s) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} F(s)e^{st}ds \qquad (10.3)$$

Đây là tích phân đường, lấy dọc theo đường thẳng đứng $s=\sigma_1$, từ $-j\infty$ đến $+j\infty$



(H 10.2)

Do tính độc nhất của phép biến đổi Laplace, ta không sử dụng định nghĩa (10.3) để xác định f(t) mà ta thường dùng kết quả của những cặp biến đổi để xác định f(t) khi đã có F(s)

10.3 CÁC ĐỊNH LÝ CƠ BẢN CỦA PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

10.3.1 Biến đổi của một tổ hợp tuyến tính

Cho 2 hàm $f_1(t)$ và $f_2(t)$, với các hằng số a, b. $F_1(s)$ và $F_2(s)$ lần lượt là biến đổi Laplace của $f_1(t)$ và $f_2(t)$. Ta có:

$$\mathcal{L}[af_1(t) + bf_2(t)] = a F_1(s) + b F_2(s) \qquad (10.4)$$

Thật vậy

$$\mathcal{L}[af_1(t) + bf_2(t)] = \int_0^\infty [af_1(t) + bf_2(t)]e^{-st}dt$$

$$= a\int_0^\infty f_1(t)e^{-st}dt + b\int_0^\infty f_2(t)e^{-st}dt$$

$\Rightarrow \quad \mathcal{L}[af_1(t) + bf_2(t)] = a F_1(s) + b F_2(s)$

Thí dụ 10.3

Tìm biến đổi Laplace của $\cos\omega t$ và $\sin\omega t$

Từ công thức Euler

$$\cos\omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \quad \text{và} \quad \sin\omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

Ap dụng (10.4) và dùng kết quả ở thí dụ 10.2

$$\mathcal{L}[\cos\omega t] = \mathcal{L}[\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}] = \frac{1}{2}[\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega}] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\cos\omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Tương tự:

$$\mathcal{L}[\sin\omega t] = \mathcal{L}[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}] = \frac{1}{2j}[\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\sin\omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

10.3.2 Biến đổi của $e^{-at}f(t)$

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = \int_0^\infty e^{-at}f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(a+s)t}dt = F(s+a)$$

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a) \qquad (10.5)$$

Khi hàm f(t) nhân với e^{-at}, biến đổi Laplace tương ứng e^{-at} f(t) có được bằng cách thay F(s) bởi F(s+a)

Thí dụ 10.4

Tìm biến đổi Laplace của $e^{-at}\cos\omega t$ và $e^{-at}\sin\omega t$

Chỉ cần thay s bởi s+a trong các các kết quả biến đổi của hàm sinωt và cosωt ở trên.

$$\mathcal{L}[e^{-at}\cos\omega t] = \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{-at}\sin\omega t] = \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$

Thí dụ 10.5

Tìm f(t) ứng với $F(s) = \frac{6s}{s^2+2s+5}$

Viết lại F(s) , sao cho xuất hiện dạng F(s+a)

$$F(s) = \frac{6s}{(s+1)^2+2^2} = \frac{6(s+1)-6}{(s+1)^2+2^2}$$

Dùng kết quả của thí dụ 10.4 với a = 1 và ω = 2

$$F(s) = 6\frac{(s+1)}{(s+1)^2+2^2} - 3\frac{2}{(s+1)^2+2^2}$$

$\Rightarrow$ $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 6e^{-t}\cos 2t - 3e^{-t}\sin 2t$

10.3.3 Biến đổi của f(t-τ)u(t-τ)

f(t-τ) là hàm f(t) trễ τ đơn vị thời gian. (Lưu ý là f(t)=0 khi t<0 nên f(t-τ)=0 khi t<τ)

$$\mathcal{L}[f(t-\tau).u(t-\tau)] = \int_0^\infty f(t-\tau).u(t-\tau)e^{-st}dt = \int_\tau^\infty f(t-\tau).e^{-st}dt$$

Đổi biến số: x= t-τ

$$\mathcal{L}[f(t-\tau).u(t-\tau)] = \int_0^\infty f(x).e^{-s(\tau+x)}dx = e^{-s\tau}\int_\tau^\infty f(x)e^{-sx}dx$$

$$\mathcal{L}[f(t-\tau).u(t-\tau)] = e^{-s\tau}F(s) \qquad (10.6)$$

Hãy so sánh (10.5) và (10.6)

* Ở (10.5), F(s+a) biểu thị sự chuyển dịch của F(s) từ s đến s+a trong lãnh vực tần số tương ứng với nhân hàm f(t) với e^{-at} trong lãnh vực thời gian.

* Ở (10.6), f(t-τ) biểu thị sự chuyển dịch của hàm f(t) từ t đến t-τ trong lãnh vực thời gian tương ứng với nhân F(s) với $e^{-s\tau}$ trong lãnh vực tần số.

Thí dụ 10.6
Tìm biến đổi của $f(t)=e^{-3t}u(t-2)$
Viết lại f(t):

$$f(t)=e^{-3(t-2)-6}u(t-2) \quad = e^{-6}e^{-3(t-2)}\,u(t-2)$$

Vì $\mathcal{L}\,[e^{-3t}u(t)]=\dfrac{1}{s+3}$

Nên $\mathcal{L}\,[e^{-3(t-2)}u(t-2)]=\dfrac{e^{-2s}}{s+3}$

$$\mathcal{L}\,[e^{-3t}u(t-2)]=e^{-6}\left(\frac{e^{-2s}}{s+3}\right)$$

10.3.4 Định lý kết hợp (Convolution theorem)

Đây là định lý dùng để tìm biến đổi ngược y(t) của tích 2 hàm F(s)và G(s)

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[G(s).F(s)]=\int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau \qquad (10.7)$$

Tích phân trong biểu thức được gọi là **kết hợp hai hàm g(t) và f(t)**, ký hiệu:

$$g(t)*f(t)=\int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau \qquad (10.8)$$

Thí dụ 10.7
Tìm kết hợp 2 hàm e^{-t} và e^{-2t}
Dùng (10.8)

$$e^{-t}*e^{-2t}=\int_0^t e^{-\tau}.e^{-2(t-\tau)}d\tau$$

$$=e^{-2t}\int_0^t e^{\tau}d\tau$$

$$e^{-t}*e^{-2t}=e^{-t}-e^{-2t}$$

Thí dụ 10.8

Xác định $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s^2+1)^2}\right]$

Dùng định lý kết hợp với $F(s)=G(s)=\dfrac{1}{s^2+1}$

Ta được f(t)=g(t)=sint

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)^2}\right]=\mathcal{L}^{-1}[F(s).G(s)]$$

$$=g(t)*f(t)=\sin t*\sin t$$

$$=\int_0^t \sin\tau.\sin(t-\tau)d\tau$$

Ap dụng công thức biến đổi lượng giác rồi lấy tích phân, ta được

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)^2}\right]=\frac{1}{2}[\text{sint-tcost}]$$

10.3.5 Biến đổi của đạo hàm

✷ Đạo hàm bậc 1

$$\mathcal{L}\frac{df(t)}{dt}=\int_0^{\infty}\frac{d}{dt}f(t)e^{-st}dt$$

Lấy tích phân từng phần

Đặt $u = e^{-st}$ $\Rightarrow$ $du = -s\,e^{-st}$

$dv=df(t)$ $\Rightarrow$ $v = f(t)$

$$\mathcal{L}\frac{df(t)}{dt}=e^{-st}f(t)\Big|_0^{\infty}+s\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}dt$$

Vì $\lim_{t\to\infty} e^{-st}f(t)=0$, số hạng thứ nhất ở vế phải = - $f(0_+)$

$$\mathcal{L}\frac{df(t)}{dt} = sF(s) - f(0_+) \qquad (10.9)$$

$f(0_+)$ là giá trị của $f(t)$ khi $t\to 0_+$

✷ Đạo hàm bậc 2

$$\mathcal{L}\frac{df^2(t)}{dt^2}=\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]\right\}$$

$$= s\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]-\frac{df(0_+)}{dt}$$

$$\mathcal{L}\frac{df^2(t)}{dt^2}=s^2F(s)-sf(0_+)-\frac{df(0_+)}{dt} \qquad (10.10)$$

Trong đó $\frac{df(0_+)}{dt}$ là giá trị của $\frac{df(t)}{dt}$ khi $t\to 0_+$

✷ Đạo hàm bậc n

Từ kết quả trên, ta suy ra trường hợp đạo hàm bậc n

$$\mathcal{L}\frac{d^nf(t)}{dt^n}=s^nF(s) - s^{n-1}f(0_+) - s^{n-2}\frac{df(0_+)}{dt}-...-\frac{df^{n-1}(0_+)}{dt^{n-1}} \qquad (10.11)$$

10.3.6 Biến đổi của tích phân

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right]=\int_0^{\infty}\left[\int_0^t f(t)dt\right]e^{-st}dt$$

Đặt $u=\int_0^t f(t)dt \Rightarrow du = f(t)$

$dv=e^{-st}dt \Rightarrow v=-\frac{1}{s}e^{-st}$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = -\frac{e^{-st}}{s}\int_0^t f(t)dt\Big|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Khi $t \to \infty$ $e^{-st} \to 0$

và $\int_0^t f(t)dt\Big|_{t=0} = 0$ nên số hạng thứ nhất của vế phải triệt tiêu

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{1}{s}F(s) \qquad (10.12)$$

Khi áp dụng vào mạch điện, thời gian thường xác định từ - ∞ đến t, như vậy $\int_{-\infty}^t f(t)dt$ có thể chia làm 2 phần

$$\int_{-\infty}^t f(t)dt = \int_{-\infty}^0 f(t)dt + \int_0^t f(t)dt$$

Số hạng thứ nhất của vế phải là hằng số và ta đặt $f^{-1}(0_+)=\int_{-\infty}^0 f(t)dt$

Hệ thức (10.12) có thể viết lại cho trường hợp tổng quát nhất:

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^t f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0_+)}{s} \qquad (10.13)$$

10.3.7 Biến đổi của tf(t)

Lấy đạo hàm hệ thức (10.1), đồng thời hoán chuyển các toán tử lấy đạo hàm và tích phân, ta được:

$$\frac{dF(s)}{ds} = \int_0^\infty \frac{d}{ds}\left[f(t)e^{-st}\right]dt = \int_0^\infty \left[-tf(t)e^{-st}\right]dt$$

Vế phải của hệ thức chính là $\mathcal{L}$ [-tf(t)]

Vậy $\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$ (10.14)

Thí dụ 10.9

Tìm biến đổi của hàm tu(t) và tcosωt

$f(t)=u(t) \Rightarrow F(s)= \frac{1}{s}$

$$\mathcal{L}[tu(t)=] = -\frac{d}{ds}(\frac{1}{s}) = \frac{1}{s^2}$$

$f(t) = \cos\omega t \Rightarrow F(s)= \frac{s}{s^2+\omega^2}$

$$\mathcal{L}[t\cos\omega t] = -\frac{d}{ds}\left[\frac{s}{s^2+\omega^2}\right] = \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$$

Dựa vào các định lý cơ bản ta có được một số cặp biến đổi. Kết hợp các định lý này với định nghĩa của phép biến đổi ta có thêm một số cặp biến đổi thông dụng.

Bảng 1 dưới đây cho biến đổi của một số hàm

10.4 ÁP DỤNG VÀO GIẢI MẠCH

Để áp dụng biến đổi Laplace vào bài toán giải mạch, ta có thể thực hiện theo một trong hai cách:

- Viết phương trình vi tích phân của mạch điện, dùng biến đổi Laplace ta được các phương trình đại số.

- Biến đổi mạch sang lãnh vực tần số nhờ biến đổi Laplace, viết các phương trình đại số cho mạch.

10.4.1 Giải phương trình vi tích phân

Dưới đây là một số thí dụ cho thấy cách áp dụng biến đổi Laplace vào giải mạch.

Thí dụ 10.10

Mạch RC nối tiếp (H 10.3), khóa K đóng ở t=0. Xác định *i*(t), cho tụ tích điện ban đầu với điện tích q_0

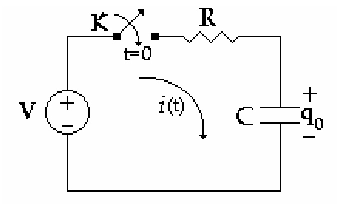
Bảng 1

STT	**f(t)**	**F(s)**
1	$\delta(t)$	1
2	u(t)	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$, n nguyãn	$\frac{1}{s^n}$
5	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
6	te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$
7	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}$, n nguyãn	$\frac{1}{(s-a)^n}$
8	$1-e^{at}$	$\frac{-a}{s(s-a)}$
9	$\frac{1}{a-b}(e^{at}-e^{bt})$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$
10	$\mathrm{Sin}\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
11	$\mathrm{Cos}\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
12	$\mathrm{Sin}(\omega t+\theta)$	$\frac{s\sin\theta+\omega\cos\theta}{s^2+\omega^2}$
13	$\mathrm{Cos}(\omega t+\theta)$	$\frac{s\cos\theta-\omega\sin\theta}{s^2+\omega^2}$
14	$e^{-at}\,\mathrm{Sin}\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
15	$e^{-at}\,\mathrm{Cos}\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

16	Sinhωt	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$
17	Coshωt	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$
18	$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s)-f(0_+)$
19	$\frac{d^2f(t)}{dt^2}$	$s^2F(s) - sf(0+) - \frac{df(0_+)}{dt}$
20	$\frac{d^nf(t)}{dt^n}$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0+) - s^{n-2}\frac{df(0_+)}{dt} - ... - \frac{df^{n-1}(0_+)}{dt^{n-1}}$
21	$\int_{-\infty}^{t} f(t)dt$	$\frac{F(s)}{s}+\frac{f^{-1}(0_+)}{s}$
22	$f(t-\tau).u(t-\tau)$	$e^{-s\tau}F(s)$
23	$af_1(t) + bf_2(t)$	$a F_1(s) + b F_2(s)$
24	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
25	$tf(t)$	$-\frac{dF(s)}{ds}$

* Khi sử dụng bảng 1, phải nhân f(t) với u(t), nói cách khác, f(t) thỏa điều kiện là f(t)=0 khi t<0

Phương trình mạch điện



(H 10.3)

$$\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} idt + Ri = Vu(t) \qquad (1)$$

Lấy biến đổi Laplace các số hạng pt (1)

$$\mathbf{L}[\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} idt] + \mathbf{L}[Ri] = \mathbf{L}[Vu(t)] \qquad (2)$$

$$\frac{1}{C}[\frac{I(s)}{s}+\frac{f^{-1}(0_+)}{s}] + RI(s) = \frac{V}{s} \qquad (3)$$

Với $f^{-1}(0_+)=\int_{-\infty}^{0} idt = q_0$

q_0 có dấu (+) ở bản trên của tụ, cùng dấu với điện tích tích bởi nguồn V nên có trị dương

Pt (3) được viết lại

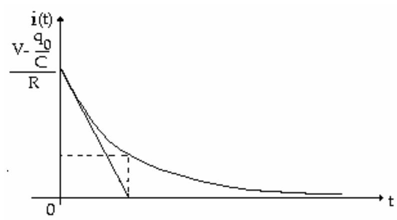
$$\frac{I(s)}{Cs}+\frac{q_0}{Cs}+RI(s)=\frac{V}{s} \qquad (4)$$

$$\Rightarrow \quad I(s)=\frac{V-q_0/C}{R}\,\frac{1}{s+1/RC} \qquad (5)$$

Dùng bảng 1 lấy biến đổi Laplace ngược để được *i*(t)

$$\Rightarrow \quad i(t)=\frac{V-q_0/C}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

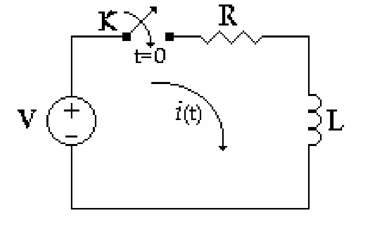
Dạng sóng của *i*(t)



(H 10.4)

Thí dụ 10.11

Mạch RL nối tiếp (H 10.5), khóa K đóng ở t=0. Xác định *i*(t), cho mạch không tích trữ năng lượng ban đầu



(H 10.5)

Phương trình mạch điện

$$Ri + L\frac{di}{dt} = Vu(t) \qquad (1)$$

Lấy biến đổi Laplace các số hạng pt (1)

$$RI(s) + L[sI(s) - i(0_+)] = \frac{V}{s} \qquad (2)$$

Mạch không tích trữ năng lượng ban đầu nên $i(0_+)=0$

$$\Rightarrow \quad I(s) = \frac{V}{L}\frac{1}{s(s+\frac{R}{L})} = \frac{V}{s}\frac{1}{(sL+R)} \qquad (3)$$

Dạng của I(s) không có trong bảng 1.

Viết lại I(s) sao cho gồm tổng của các hàm đơn giản

$$I(s) = \frac{V}{L}\frac{1}{s(s+\frac{R}{L})} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\frac{R}{L}} \qquad (4)$$

A, B là 2 hằng số cần xác định

Qui đồng mẫu số vế 2, cân bằng 2 vế, ta được:

$$\frac{A(s+\frac{R}{L}) + Bs}{s(s+\frac{R}{L})} = \frac{A\frac{R}{L} + (A+B)s}{s(s+\frac{R}{L})}$$

$$A\frac{R}{L} = \frac{V}{L} \Rightarrow A = \frac{V}{R}$$

$$A+B=0 \quad \Rightarrow \quad B = -A = -\frac{V}{R}$$

Thay A và B vào (4)

$$I(s) = \frac{V}{R}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{R}{L}}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{i(t)} = \frac{V}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \quad , \quad \mathbf{t \geq 0}$$

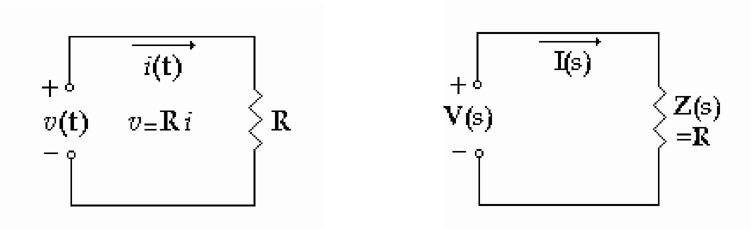
10.4.2 Mạch điện biến đổi

Trong chương 6, với khái niệm vectơ pha, ta đã biến đổi mạch điện từ lãnh vực thời gian sang lãnh vực tần số và viết các phương trình đại số cho mạch.

Tương tự , với phép biến đổi Laplace, ta cũng biến đổi mạch điện từ lãnh vực thời gian sang lãnh vực tần số phức (s), kể cả các loại nguồn kích thích khác nhau và ta có lời giải đầy đủ thỏa các điều kiện đầu.

✷ **Điện trở**

$V_R = Ri(t) \Rightarrow \mathbf{V}_R(s) = R\mathbf{I}(s) \;\Rightarrow\; \mathbf{Z}_R(s) = R$ và $\mathbf{Y}_R(s) = 1/R$ (10.15)



(H 10.6)

✷ Cuộn dây

$v_L(t)=L\dfrac{di_L(t)}{dt}$ Hay $i_L(t)=\dfrac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v_L(t)dt$

Biến đổi Laplace tương ứng

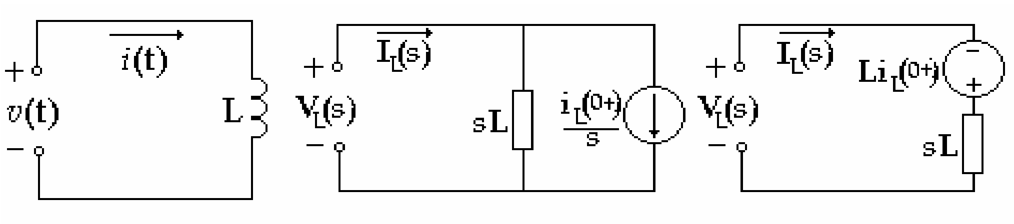
$V_L(s)=L[sI_L(s)-i_L(0_+)]$

$\Rightarrow \quad I_L(s)=\dfrac{V_L(s)}{sL}+\dfrac{Li_L(0+)}{sL}$ (10.16a)

hay $\quad sLI_L(s)=V_L(s)+L\ i_L(0+)$ (10.16b)

Biểu thức (10.16a) cho mạch biến đổi (H 10.7b)

Biểu thức (10.16b) cho mạch biến đổi (H 10.7c)



(a) (b) (c)

(H 10.7)

✷ Tụ điện

$i_C(t)=C\dfrac{dv_C(t)}{dt}$ hay $v_C(t)=\dfrac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(t)dt$

Biến đổi của $v_C(t)$

$V_C(s)=\dfrac{1}{C}[\dfrac{I_c(s)}{s}+\dfrac{q(0+)}{s}]$

Với $v_C(0+)=\dfrac{q(0+)}{C}$ là điện thế do tụ tích điện ban đầu

$V_C(s)=\dfrac{1}{sC}I_c(s)+\dfrac{v_C(0+)}{s}$ (10.17a)

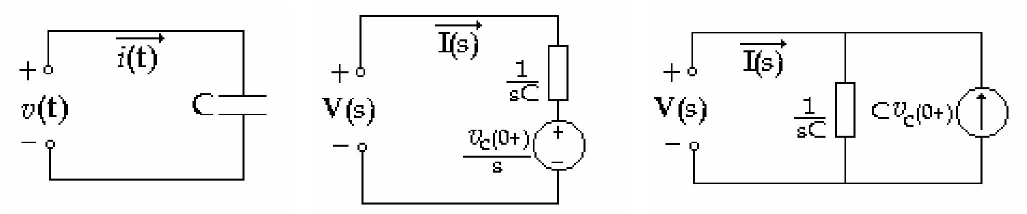
Hay $\quad I_c(s)=sCV_C(s)-Cv_C(0+)$ (10.17b)

Đặt $\quad V_1(s)=V_C(s)-\dfrac{v_C(0+)}{s}$

Biến đổi tổng trở của tụ là: $Z_C(s)=\dfrac{V_1(s)}{I_C(s)}=\dfrac{1}{sC}$

Biểu thức (10.17a) cho mạch biến đổi của tụ (H 10.8b)

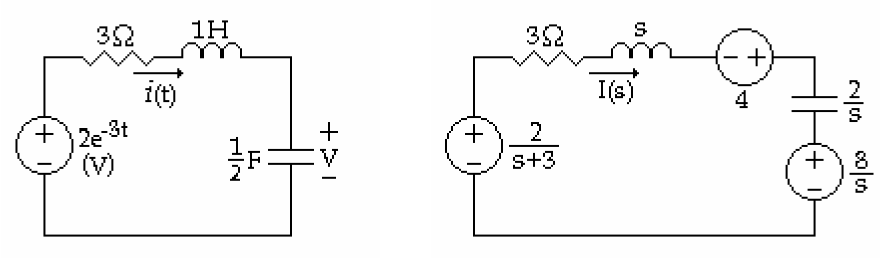
Biểu thức (10.17b) cho mạch biến đổi của tụ (H 10.8c)



(a) (b) (c)
(H 10.8)

Thí dụ 10.12

Xác định i(t) khi t>0 của mạch (H 10.9a). Cho i(0)=4A và v(0)=8V



(a) (H 10.9) (b)

Mạch biến đổi cho bởi (H 10.11b)

$$I(s)=\frac{(2/s+3)+4-8/s}{3+s+2/s}$$

$$=\frac{2s+(4s-8)(s-3)}{(s^2+3s+2)(s+3)}$$

$$=\frac{4s^2+6s-24}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Triển khai I(s)

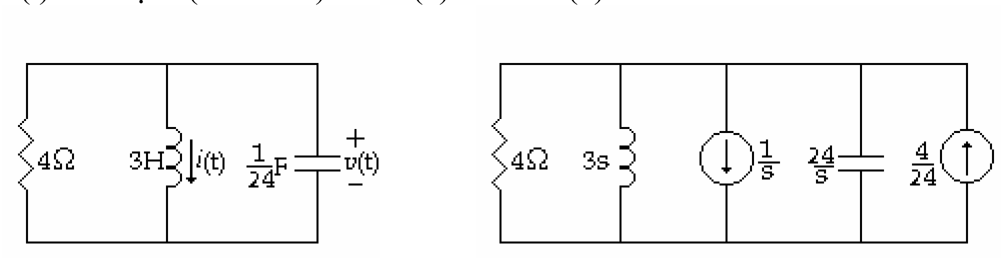
$$I(s)=-\frac{13}{s+1}+\frac{20}{s+2}-\frac{3}{s+3}$$

Suy ra, khi t>0

$$\boldsymbol{i(t)=-13e^{-t}+20e^{-2t}-3e^{-3t}\ \text{A}}$$

Thí dụ 10.13

Xác định v(t) của mạch (H 10.10a). Cho i(0)=1A và v(0)=4V



(a) (b)
(H 10.10)

Viết phương trình nút cho mạch biến đổi (H 10.10b)

$$\frac{V}{4}+\frac{V}{3s}+\frac{1}{s}+\frac{sV}{24}-\frac{4}{24}=0$$

$\Rightarrow \qquad V(s)=\dfrac{4s-24}{(s+2)(s+4)}=-\dfrac{16}{s+2}+\dfrac{20}{s+4}$

và $\qquad \boldsymbol{v(t)=-16e^{-2t}+20e^{-4t}}$ **V**

10.5 CÁC PHƯƠNG PHÁP TRIỂN KHAI HÀM P(s)/Q(s)

Trong phân giải mạch điện bằng phép biến đổi Laplace, kết quả đạt được là một hàm theo s có dạng P(s)/Q(s) , trong đó P(s) và Q(s) là các đa thức.

Nếu P(s)/Q(s) có dạng trong bảng 1 thì ta có ngay kết quả biến đổi Laplace ngược. Trong nhiều trường hợp ta phải triển khai P(s)/Q(s) thành tổng các hàm đơn giản hơn và có trong bảng.

Gọi m và n là bậc của P(s) và Q(s)
Có 2 trường hợp

* $m\leq n$, có thể triển khai ngay P(s)/Q(s)
* $m>n$, ta phải thực hiện phép chia để được

$$\frac{P(s)}{Q(s)}=A_0+A_1s+.....+A_{m-n}s^{m-n}+\frac{P_1(s)}{Q_1(s)} \qquad (10.18)$$

$P_1(s)$ và $Q_1(s)$ có bậc bằng nhau và ta có thể triển khai $P_1(s)/Q_1(s)$

10.5.1. Triển khai từng phần

✷ **Trường hợp 1**

Q(s)=0 có nghiệm thực phân biệt s_1 , s_2, . . . s_n.

$$\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{K_1}{s-s_1}+\frac{K_2}{s-s_2}+.....+\frac{K_n}{s-s_n} \qquad (10.19)$$

K_i (i= 1, 2,. . . ., n) là các hằng số xác định bởi:

$$K_i=(s-s_i)\left.\frac{P(s)}{Q(s)}\right|_{s=s_i} \qquad (10.20)$$

Thí dụ 10.14

Triển khai hàm $\quad I(s)=\dfrac{s-1}{s^2+3s+2}$, xác định $i(t)=\mathcal{L}^{-1}[I(s)]$

Phương trình $s^2+3s+2=0$ có 2 nghiệm $s_1=-2$ và $s_2=-1$

$$I(s)=\frac{s-1}{s^2+3s+2}=\frac{K_1}{s+2}+\frac{K_2}{s+1}$$

$$K_1=(s+2)\left.\frac{P(s)}{Q(s)}\right|_{s=-2}=3$$

$$K_2=(s+1)\left.\frac{P(s)}{Q(s)}\right|_{s=-1}=-2$$

$$I(s)=\frac{3}{s+2}-\frac{2}{s+1}$$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{i(t)= 3e^{-2t}-2e^{-t}}$

✷ Trường hợp 2

Q(s)=0 có nghiệm đa trùng bậc r

$$\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{P(s)}{(s-s_i)^r}=\frac{K_1}{s-s_i}+\frac{K_2}{(s-s_i)^2}+.....+\frac{K_r}{(s-s_i)^r} \qquad (10.21)$$

Để xác định K_1, K_2, . . . K_r, ta xét thí dụ sau:

Thí dụ 10.15

Triển khai $\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{s+2}{(s+1)^2}$

$$\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{K_1}{s+1}+\frac{K_2}{(s+1)^2} \qquad (1)$$

Nhân 2 vế phương trình (1) với $(s+1)^2$

$s+2=(s+1)K_1+K_2$ (2)

Cho s=-1, ta được $K_2=1$

Nếu ta cũng làm như vậy để xác định K_1 thì sẽ xuất hiện các lượng vô định

Để xác định K_1, lấy đạo hàm theo s phương trình (2)

$1+0=K_1+0 \Rightarrow K_1=1$

Tóm lại

$$\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2}$$

Và $i(t) = e^{-t} + te^{-t}$

Với Q(s)=0 có nghiệm kép, một hằng số được xác định nhờ đạo hàm bậc 1.

Suy rộng ra, nếu Q(s)=0 có nghiệm đa trùng bậc r, ta cần các đạo hàm từ bậc 1 đến bậc r-1.

✷ Trường hợp 3

Q(s)=0 có nghiệm phức liên hợp $s=\alpha \pm j\omega$

$$\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{P(s)}{(s-\alpha-j\omega)(s-\alpha+j\omega)} \qquad (10.22)$$

$$\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{K}{(s-\alpha-j\omega)}+\frac{K^*}{(s-\alpha+j\omega)} \qquad (10.23)$$

Các hằng số K xác định bởi

$$K=(s-\alpha+j\omega)\frac{P(s)}{Q(s)}\bigg|_{s=\alpha-j\omega}=Ae^{-j\theta},$$

Và $$K^*=(s-\alpha-j\omega)\frac{P(s)}{Q(s)}\bigg|_{s=\alpha+j\omega}=Ae^{+j\theta} \qquad (10.24)$$

Thí dụ 10.16

Triển khai $I(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{1}{s^2+4s+5}$

Q(s)=0 có 2 nghiệm $-2 \pm j$

$$I(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{K}{(s+2+j)}+\frac{K^*}{(s-2-j)}$$

$$K=(s+2+j)\frac{P(s)}{Q(s)}\bigg|_{s=-2-j}=j\frac{1}{2}=\frac{1}{2}e^{j90^\circ}$$

$$K^*=(s+2-j)\frac{P(s)}{Q(s)}\bigg|_{s=-2+j}=-j\frac{1}{2}=\frac{1}{2}e^{-j90^\circ}$$

$$I(s)=\frac{j1/2}{s+2+j}-\frac{j1/2}{s+2-j}$$

$$\Rightarrow \quad i(t)=j\frac{1}{2}[e^{(-2-j)t}-e^{(-2+j)t}]=e^{-2t}[\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}]$$

Hay **$i(t)=e^{-2t}\sin t$ A**

10.5.2 Công thức Heaviside

Tổng quát hóa các bài toán triển khai hàm I(s)=P(s)/Q(s), Heaviside đưa ra công thức cho ta xác định ngay hàm *i*(t), biến đổi ngươc của I(s)

10.5.2.1 Q(s)=0 có n nghiệm phân biệt

$$i(t)=\mathcal{L}^{-1}[I(s)]=\mathcal{L}^{-1}[\frac{P(s)}{Q(s)}]=\sum_{j=1}^{n}(s-s_j)\frac{P(s)e^{st}}{Q(s)}\bigg|_{s=s_j} \qquad (10.25)$$

Hoặc

$$i(t)=\sum_{j=1}^{n}\frac{P(s_j)}{Q'(s_j)}e^{s_jt} \qquad (10.26)$$

Trong đó s_j là nghiệm thứ j của Q(s)=0

Thí dụ 10.17

Giải lại **thí dụ 10.14** bằng công thức Heaviside

$I(s)=\frac{s-1}{s^2+3s+2}$, xác định $i(t)=\mathcal{L}^{-1}[I(s)]$

Phương trình $s^2+3s+2=0$ có 2 nghiệm $s_1=-2$ và $s_2=-1$

$Q(s)=s^2+3s+2 \Rightarrow Q'(s)=2s+3$

Ap dụng công thức (10.26)

$$i(t)=\sum_{j=1}^{n}\frac{P(s_j)}{Q'(s_j)}e^{s_jt}=\frac{P(-2)}{Q'(-2)}e^{-2t}+\frac{P(-1)}{Q'(-1)}e^{-t}$$

$\Rightarrow$ **$i(t)=3e^{-2t}-2e^{-t}$ A**

10.5.2.2 Q(s)=0 có nghiệm đa trùng bậc r

$$i(t)=\mathcal{L}^{-1}[I(s)]=\mathcal{L}^{-1}[\frac{P(s)}{Q(s)}]=e^{s_jt}\sum_{n=1}^{r}\frac{1}{(r-n)!}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^{r-n}R(s_j)}{ds^{r-n}}\bigg|_{s=s_j} \qquad (10.27)$$

s_j là nghiệm đa trùng bậc r

$$R(s_j)=\frac{P(s)}{Q(s)}(s-s_j)^r \qquad (10.28)$$

Thí dụ 10.18

Giải lại **thí dụ 10.15** bằng công thức Heaviside

$$I(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{s+2}{(s+1)^2}$$

Q(s)=0 có nghiệm kép, r=2, s_j=-1

Ap dụng công thức (10.27)

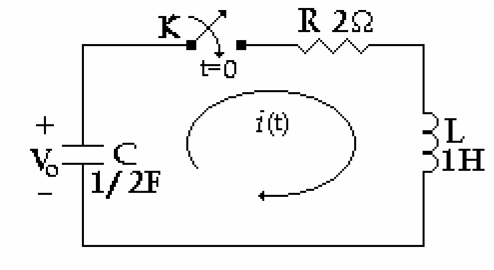
Với $\quad R(s_j)=\frac{s+2}{(s+1)^2}(s+1)^2=s+2$

$$i(t)=e^{-t}[\frac{1}{1!}\frac{t^0}{0!}\frac{d(s+2)}{ds}+\frac{1}{0!}\frac{t^1}{1!}(s+2)] \quad ; \quad s=-1$$

Và $\quad \boldsymbol{i(t)=e^{-t}+te^{-t}}$ **A**

Thí dụ 10.19

Cho mạch điện (H 10.11), tụ C tích điện đến V_0=1V và khóa K đóng ở t=0. Xác định dòng i(t)



$$Ri+L\frac{di}{dt}+\int_{-\infty}^{t} i\,dt=0$$

Lấy biến đổi Laplace

$$L[sI(s)-i(0_+)]+RI(s)+\frac{1}{Cs}[I(s)+q(0_+)]=0$$

Dòng điện qua cuộn dây liên tục nên

$i(0_+)=i(0_-)=0$

$q(0_+)$: điện tích ban đầu của tụ:

$$\frac{q(0_+)}{Cs}=\frac{V_o}{s}=-\frac{1}{s}$$

(Để ý dấu của điện tích đầu trên tụ ngược chiều điện tích nạp bởi dòng i(t) khi chạy qua mạch)

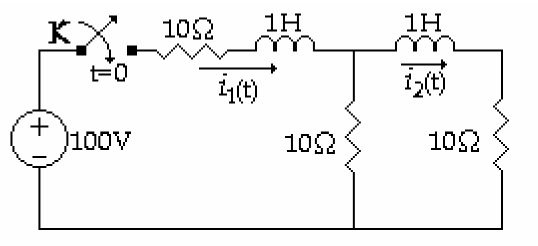
Thay giá trị đầu vào, sắp xếp lại

$$I(s)=\frac{1}{s^2+2s+2}=\frac{1}{(s+1)^2+1}$$

$\Rightarrow \quad i(t)=\mathcal{L}^{-1}[I(s)]=e^{-t}\sin t.u(t)$

Thí dụ 10.20

Cho mạch (H 10.12), khóa K đóng ở t=0 và mạch không tích trữ năng lượng ban đầu. Xác định i_2(t)



Viết pt vòng cho mạch

$$\frac{di_1}{dt}+20i_1-10i_2=100u(t) \qquad (1)$$

$$\frac{di_2}{dt}+20i_2-10i_1=0 \qquad (2)$$

Lấy biến đổi Laplace, để ý mạch không tích trử năng lượng ban đầu:

$(s+20)I_1(s)-10I_2(s)=\dfrac{100}{s}$ (3)

$-10\ I_1(s)+(s+20)I_2(s)=0$ (4)

Giải hệ (3) và (4)

$$I_2(s)=\frac{\begin{vmatrix} s+20 & \frac{100}{s} \\ -10 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+20 & -10 \\ -10 & s+20 \end{vmatrix}}=\frac{1000}{s(s^2+40s+300)}$$

Triển khai $I_2(s)$

$$I_2(s)=\frac{3,33}{s}+\frac{5}{s+10}+\frac{1,67}{s+30}$$

$\Rightarrow\ i_2(t)=3,33-5e^{-10t}+1,67e^{-30t}$

10.6 ĐỊNH LÝ GIÁ TRỊ ĐẦU VÀ GIÁ TRỊ CUỐI

10.6.1 Định lý giá trị đầu

Từ phép biến đổi của đạo hàm: $\mathcal{L}\dfrac{df(t)}{dt}=sF(s)-f(0+)$

Lấy giới hạn khi $s\rightarrow\infty$

$$\lim_{s\to\infty}[\mathcal{L}\frac{df(t)}{dt}]=\lim_{s\to\infty}[sF(s)-f(0+)]$$

mà $\displaystyle\lim_{s\to\infty}[\mathcal{L}\frac{df(t)}{dt}]=\lim_{s\to\infty}\int_0^\infty\frac{df(t)}{dt}e^{-st}dt=0$

Vậy $\displaystyle\lim_{s\to\infty}[sF(s)-f(0+)]=0$

$f(0_+)$ là hằng số nên

$$f(0+)=\lim_{s\to\infty}sF(s) \qquad (10.29)$$

(10.29) chính là nội dung của định lý giá trị đầu

Lấy trường hợp thí dụ 10.10, ta có:

$$I(s)=\frac{V-q_0/C}{R}\frac{1}{s+1/RC}$$

$$i(0+)=\lim_{s\to\infty}sI(s)=\frac{V-q_0/C}{R}$$

10.6.2 Định lý giá trị cuối

Từ phép biến đổi đạo hàm: $\mathcal{L}\dfrac{df(t)}{dt} = sF(s)-f(0+)$

Lấy giới hạn khi $s\rightarrow 0$

$$\lim_{s\to 0}\left[\mathcal{L}\frac{df(t)}{dt}\right] = \lim_{s\to 0}\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}e^{-st}dt = \lim_{s\to 0}[sF(s)-f(0+)]$$

mà $\displaystyle\lim_{s\to 0}\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}e^{-st}dt = \lim_{s\to 0} = \int_0^\infty df(t) = f(\infty) - f(0+)$

Vậy $\displaystyle f(\infty)-f(0+)=\lim_{s\to 0}[sF(s)-f(0+)]$

Hay $\displaystyle f(\infty)=\lim_{s\to 0} sF(s)$ (10.30)

(10.30) chính là nội dung của định lý giá trị cuối, cho phép xác định giá trị hàm f(t) ở trạng thái thường trực.

Tuy nhiên, (10.30) chỉ xác định được khi nghiệm của mẫu số của sF(s) có phần thực âm, nếu không $\displaystyle f(\infty)=\lim_{t\to\infty} f(t)$ không hiện hữu.

Thí dụ, với f(t)=sint thì sin∞ không có giá trị xác định (tương tự cho e^{∞}). Vì vậy (10.30) không áp dụng được cho trường hợp kích kích là hàm sin.

Lấy lại **thí dụ 10.13**, xác định dòng điện trong mạch ở trạng thái thường trực

$$I(s)=\frac{V}{R}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+R/L}\right)$$

$$i(\infty)=\lim_{s\to 0} sI(s)=\frac{V}{R}\left(1-\frac{s}{s+R/L}\right)=\frac{V}{R}$$

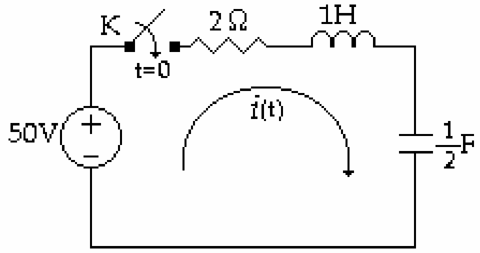
$$i(\infty)=\frac{V}{R}$$

BÀI TẬP

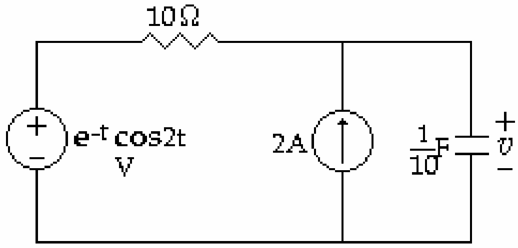
✷✷✷

10.1 Mạch (H P10.1). Khóa K đóng ở t=0 và mạch không tích trữ năng lượng ban đầu. Xác định $i(t)$ khi t> 0

10.2 Mạch (H P10.2). Xác định $v(t)$ khi t> 0. Cho $v(0)$=10V



(H P10.1)

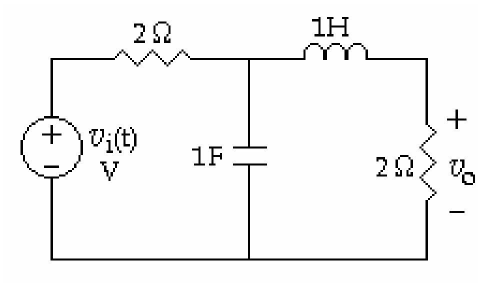


(H P10.2)

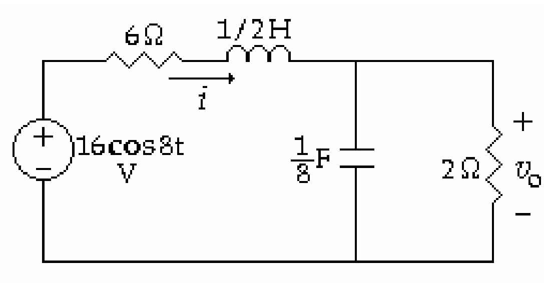
10.3 Mạch (H P10.3). Xác định $v_o(t)$

Cho $v_i(t) = \begin{cases} 4V, & t < 0 \\ 4e^{-t}, & t > 0 \end{cases}$

10.4 Mạch (H P10.4). Xác định $v_o(t)$. Cho $v_o(0)$=4V và $i(0)$=3A

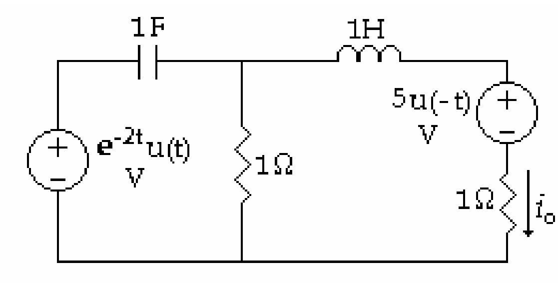


(H P10.3)

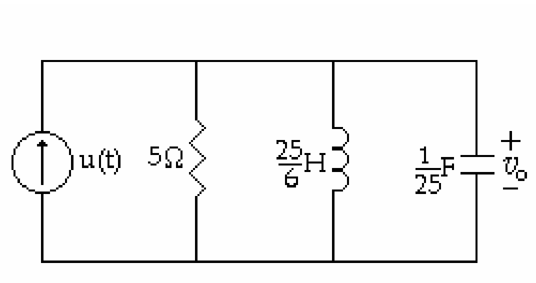


(H P10.4)

10.5 Mạch (H P10.5). Xác định $i_o(t)$.
10.6 Mạch (H P10.6). Dùng định lý kết hợp xác định $v_o(t)$.

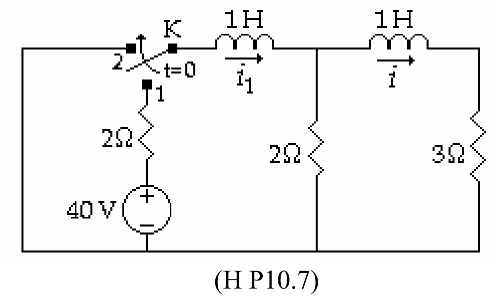


(H P10.5)



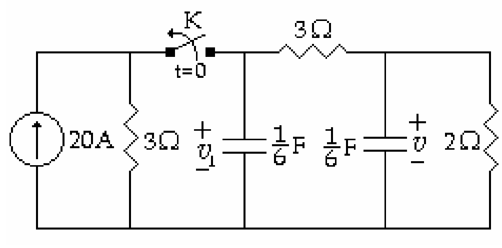
(H P10.6)

10.7 Mạch (H P10.7) đạt trạng thái thường trực ở t=0. với khóa K ở vị trí 1. Chuyển K sang vị trí 2, thời điểm t=0. Xác định i khi t>0



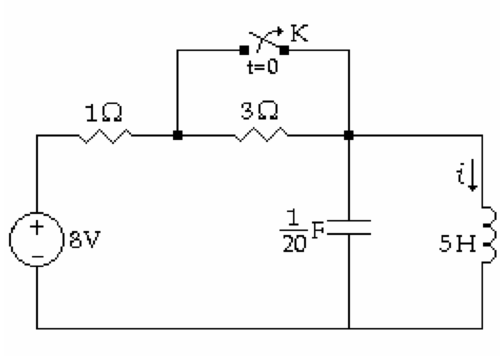
(H P10.7)

10.8 Mạch (H P10.8) đạt trạng thái thường trực ở t=0. Xác định v khi t>0



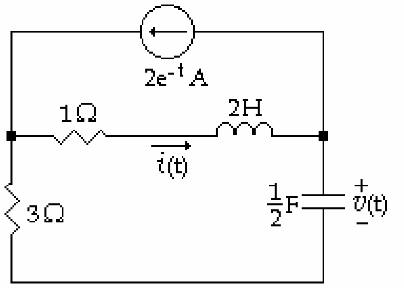
(H P10.8)

10.9 Mạch (H P10.9) đạt trạng thái thường trực ở t=0. Xác định i khi t>0



(H P10.9)

10.10 Mạch (H P10.10). Xác định *i*(t) khi t>0. Cho *v*(0) = 4 V và *i*(0) = 2 A



(H P10.10)