

L #7
ĐÁP ỨNG TẦN SỐ CỦA HỆ THỐNG
TUYẾN TÍNH BẤT BIẾN

tantd@vnu.edu.vn

Slide 1

Nội dung

- Liên hệ đặc trưng biên độ và pha của tín hiệu thời gian rời rạc với các điểm cực và điểm không trong mặt phẳng Z
- Thảo luận về:
 - » Các hệ thống truyền qua (All-pass)
 - » Các hệ thống pha tối thiểu
 - » Các hệ thống pha cực đại
 - » Các hệ thống pha tuyến tính

Slide 2

Phương trình sai phân - biến đổi Z - LSI

$$x[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow y[n]$$

■ Pt sai phân

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

■ Hàm truyền

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

Slide 3

Phương trình sai phân - biến đổi Z - LSI

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

■ Comments:

- LSI : đa thức z hoặc z^{-1}
- Định nghĩa điểm cực, điểm 0

Slide 4

Biến đổi thời gian rời rạc và Biến đổi Z

■ DTFT $z = e^{j\omega} \quad H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}}$

■ Biến đổi thời gian rời rạc được đặc trưng bởi biên độ và pha

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{j\omega k}} = |H(e^{j\omega})| e^{j\angle H(e^{j\omega})}$$

Slide 5

Tìm đặc trưng biên độ và pha nhờ biến đổi Z

■ Biến đổi Z

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \left(\frac{b_0}{a_0} \right) \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}$$

■ c_k là điểm cực d_k và là điểm 0

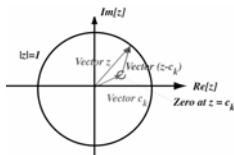
Slide 6

Tìm đặc trưng biên độ và pha nhờ biến đổi Z

■ z^{-1} sang z

$$H(z) = \left(\frac{b_0}{a_0} \right) \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} = z^{N-M} \left(\frac{b_0}{a_0} \right) \frac{\prod_{k=1}^M (z - c_k)}{\prod_{k=1}^N (z - d_k)}$$

■ Xem xét 1 trong các tử số $(z - c_k)$



là khoảng cách

Slide 7

Tìm đặc trưng biên độ

$$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = z^{N-M} \left(\frac{b_0}{a_0} \right) \frac{\prod_{k=1}^M (z - c_k)}{\prod_{k=1}^N (z - d_k)} \Bigg|_{z=e^{j\omega}}$$

■ Biên độ:

$$|H(e^{j\omega})| = |H(z)|_{z=e^{j\omega}} = |z|^{N-M} \left| \frac{b_0}{a_0} \right| \frac{\prod_{k=1}^M |z - c_k|}{\prod_{k=1}^N |z - d_k|} \Bigg|_{z=e^{j\omega}} = \left| \frac{b_0}{a_0} \right| \frac{\prod_{k=1}^M |z - c_k|}{\prod_{k=1}^N |z - d_k|} \Bigg|_{z=e^{j\omega}}$$

■ Là tích của các biên độ từ điểm 0 chia cho tích các biên độ từ các điểm cực

Slide 8

Tìm đặc trưng pha

$$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = z^{N-M} \left(\frac{b_0}{a_0} \right) \frac{\prod_{k=1}^M (z - c_k)}{\prod_{k=1}^N (z - d_k)} \bigg|_{z=e^{j\omega}}$$

■ Pha:

$$\angle H(e^{j\omega}) \bigg|_{z=e^{j\omega}} = \omega(N-M) + \angle \left(\frac{b_0}{a_0} \right) + \sum_{k=1}^M \angle(z - c_k) - \sum_{k=1}^N \angle(z - d_k) \bigg|_{z=e^{j\omega}}$$

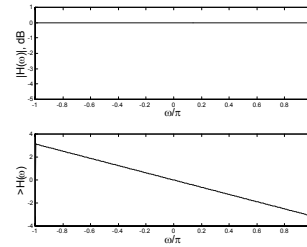
- Là tổng các góc của điểm 0 trừ đi tổng các góc từ điểm cực

Slide 9

Vd1: trễ đơn vị

$$H(z) = z^{-1}$$

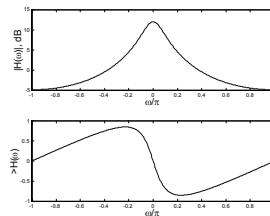
■



Slide 10

VD2: suy hao hàm mũ

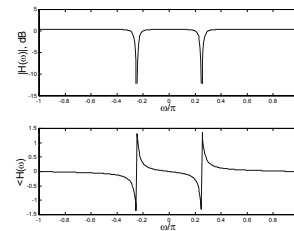
$$H(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$$



Slide 11

Vd3 bộ lọc triệt dài

$$H(z) = \frac{(z - e^{j\pi/4})(z - e^{-j\pi/4})}{(z - .95e^{j\pi/4})(z - .95e^{-j\pi/4})}$$



Slide 12

Tóm tắt

- DTFT được tính bởi biến đổi Z trên đường tròn đơn vị
- Khi chạy dọc vòng tròn đơn vị,
 - Biên độ DTFT tỷ lệ với tích...
 - Pha là hiệu....
- Sau đây:
 - » Các hệ thống truyền qua (All-pass)
 - » Các hệ thống pha tối thiểu
 - » Các hệ thống pha cực đại
 - » Các hệ thống pha tuyến tính

Slide 13

Là các trường hợp đặc biệt của LSI

- » Các hệ thống truyền qua (All-pass)
- » Các hệ thống pha tối thiểu
- » Các hệ thống pha cực đại
- » Các hệ thống pha tuyến tính

Slide 14

Các hệ thống truyền qua (All-pass)

- α phức $H(z) = \frac{z^{-1} - \alpha^*}{1 - \alpha z^{-1}}$
- Gán $\alpha = re^{j\theta}$
 - Điểm cực $z = re^{j\theta}$
 - Điểm 0 $z = \frac{1}{r}e^{j\theta}$

Slide 15

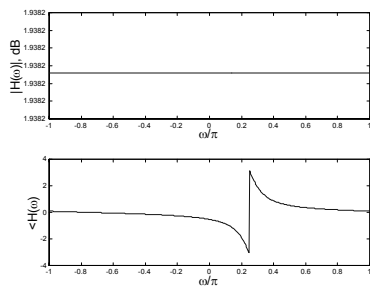
Các hệ thống truyền qua (All-pass)

$$H(z) = \frac{z^{-1} - \alpha^*}{1 - \alpha z^{-1}}; \quad z = e^{j\omega}, \alpha = re^{j\theta}$$

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})|^2 &= H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) = \frac{(e^{-j\omega} - re^{-j\theta})(e^{j\omega} - re^{j\theta})}{(1 - re^{j\theta}e^{-j\omega})(1 - re^{-j\theta}e^{j\omega})} \\ &= \frac{(1 - re^{j(\theta-\omega)} - re^{-j(\theta-\omega)} + r^2)}{(1 - re^{-j(\theta-\omega)} - re^{j(\theta-\omega)} + r^2)} = 1 \end{aligned}$$

Slide 16

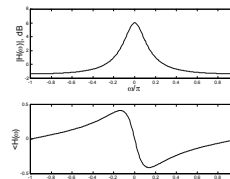
Các hệ thống truyền qua (All-pass)



Slide 17

Các hệ thống truyền qua (All-pass)

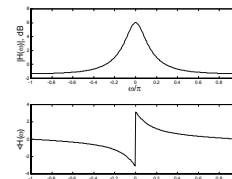
Ht 1:



pole at .75, zero at .5

■ Độ dịch pha HT2 lớn hơn

Ht 2:



pole at .75, zero at 2

Slide 18

Đánh giá dựa vào đặc trưng pha

- Ht1 ít dịch pha hơn Ht2 → nói chung là tốt hơn
- Ht1 có điểm 0 thuộc vòng tròn đơn vị, Ht2 có điểm 0 nằm ngoài vòng tròn đơn vị
- Ht xem là **pha tối thiểu** nếu các điểm cực và điểm 0 nằm trong vòng tròn đơn vị
- Ht xem là **pha tối đa** nếu các điểm cực và điểm 0 nằm ngoài vòng tròn đơn vị
- Còn các trường hợp khác :) không gọi tên

Slide 19

Tính đối xứng của DTFTs

- Nếu $x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$
thì $x[-n] \leftrightarrow X(e^{-j\omega})$
 $x^*[n] \leftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$
- và...
even $x[n] = x[-n] \Rightarrow X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega})$
odd $x[n] = -x[-n] \Rightarrow X(e^{j\omega}) = -X(e^{-j\omega})$
 $x[n] = x^*[n] \Rightarrow X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$
real Hermitian symmetric

Slide 20

Hermitian symmetry

■ If $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$

Then $\text{Re}[X(e^{j\omega})]$ is even

$\text{Im}[X(e^{j\omega})]$ is odd

$|X(e^{j\omega})|$ is even

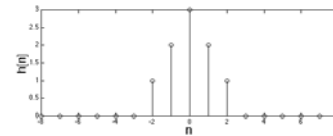
$\angle X(e^{j\omega})$ is odd

And If $x[n]$ is real and even, $X(e^{j\omega})$ will be real and even
and if $x[n]$ is real and odd, $X(e^{j\omega})$ will be imaginary and odd

Slide 21

Hệ thống pha 0

■ Xét ht có đáp ứng đơn vị là chẵn, đối xứng:



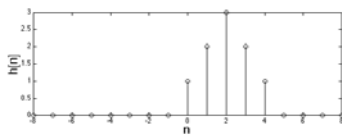
■ DTFT $H(z) = e^{2j\omega} + 2e^{j\omega} + 3 + 2e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}$
 $= 2\cos(2\omega) + 4\cos(\omega) + 3$

■ Comments:
– Đáp ứng tần số là số thực, nên dịch pha là 0

Slide 22

Ht pha tuyến tính

■ Thực hiện trễ để làm ht trở thành nhân quả



■ DTFT $H(z) = e^{2j\omega} + 2e^{j\omega} + 3 + 3e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}$
 $= e^{-2j\omega}(e^{2j\omega} + 2e^{j\omega} + 3 + 2e^{-j\omega} + e^{-2j\omega})$
 $= e^{-2j\omega}(2\cos(2\omega) + 4\cos(\omega) + 3)$

■ Nx
– Đáp ứng tần số có dịch pha tuyến tính

Slide 23

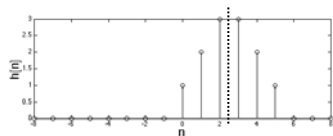
Nx

- Có thể coi đáp ứng pha 0 được qua bộ trễ thời gian
- xảy ra khi đáp ứng là chẵn và đối xứng qua $n=2$
- Độ dịch pha tuyến tính: mong muốn
- Ht dịch pha tuyến tính là nhân quả → chiều dài hữu hạn (5)

Slide 24

VD khác về dịch pha tuyến tính

■ số mẫu chẵn



■ DTFT

$$\begin{aligned} H(z) &= e^{j\omega} + 2e^{-j\omega} + 3e^{-2j\omega} + 3e^{-3j\omega} + 3e^{-4j\omega} + e^{-5j\omega} \\ &= e^{-2.5j\omega} (e^{2.5j\omega} + 2e^{1.5j\omega} + 3e^{.5j\omega} + 3e^{-.5j\omega} + 2e^{-1.5j\omega} + e^{-2.5j\omega}) \\ &= e^{-2.5j\omega} (2\cos(2.5\omega) + 4\cos(1.5\omega) + 3\cos(.5\omega)) \end{aligned}$$

Slide 25

Nx

- đối xứng qua $n=2.5$
- gọi là pha tuyến tính hoá mờ rộng

Slide 26

Có 4 loại ht pha tuyến tính

- I: Số mẫu lẻ, đx chẵn
- II: Số mẫu chẵn, đx chẵn
- III: Số mẫu lẻ, đx lẻ
- IV: Số mẫu chẵn, đx lẻ

Slide 27